

Universidade Federal de Santa Catarina
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação
Departamento de Ensino de Graduação a Distância
Centro Socioeconômico
Departamento de Ciências da Administração

Pesquisa Operacional

Professor

Cesar Duarte Souto-Maior

2014
3ª edição

1ª edição – 2009.

2ª edição revisada e atualizada – 2012.

S728p Souto-Maior, Cesar Duarte

Pesquisa operacional / Cesar Duarte Souto-Maior. – 3. ed. –
Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC,
2014.

94p.

Inclui bibliografia

Curso de Graduação em Administração, modalidade a Distância
ISBN: 978-85-7988-151-0

1. Pesquisa operacional. 2. Programação linear. 3. Processo decisório.
4. Simplex (Matemática). 5. Educação a distância. I. Título.

CDU: 65.012.122

Catálogo na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

REITORA – *Roselane Neckel*

VICE-REITORA – *Lúcia Helena Martins Pacheco*

PRÓ-REITOR DE GRADUAÇÃO – *Julian Borba*

COORDENADOR UAB – *Sônia Maria Silva Correa de Souza Cruz*

CENTRO SOCIOECONÔMICO

DIRETORA – *Elisete Dahmer Pfitscher*

VICE-DIRETOR – *Rolf Hermann Erdmann*

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA ADMINISTRAÇÃO

CHEFE DO DEPARTAMENTO – *Marcos Baptista Lopez Dalmau*

SUBCHEFE DO DEPARTAMENTO – *Eduardo Lobo*

COORDENADOR DE CURSO – *André Luís da Silva Leite*

SUBCOORDENADOR DE CURSO – *Rogério da Silva Nunes*

COMISSÃO EDITORIAL E DE REVISÃO – *Alessandra de Linhares Jacobsen*

Mauricio Roque Serva de Oliveira

Paulo Otolini Garrido

Claudelino Martins Dias Junior

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS – *Denise Aparecida Bunn*

SUPERVISÃO DE PRODUÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS – *Erika Alessandra Salmeron Silva*

DESIGN INSTRUCIONAL – *Denise Aparecida Bunn*

Fabiana Mendes de Carvalho

Patrícia Regina da Costa

Maria Aparecida da Silva Alves

PROJETO GRÁFICO E FINALIZAÇÃO – *Annye Cristiny Tessaro*

DIAGRAMAÇÃO – *Rita Castelan*

Annye Cristiny Tessaro

REVISÃO DE PORTUGUÊS – *Sergio Luiz Meira*

ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO – *Cesar Duarte Souto-Maior*

Apresentação

Prezado estudante!

Uma das principais funções do administrador é tomar decisões. Essa disciplina tem como objetivo fornecer métodos para que você possa tomar boas decisões que trarão benefícios para você e para a organização em que você estiver atuando.

A disciplina de *Pesquisa Operacional* não está isolada. Ela envolve conhecimentos que você aprendeu em *Matemática para Administradores* e *Estatística Aplicada à Administração*. Para aplicar os métodos de Pesquisa Operacional é necessário definir um objetivo, por exemplo, maximizar a receita, minimizar o tempo de atendimento ou maximizar a quantidade de itens produzidos. Com a Pesquisa Operacional você pode encontrar a solução ótima para cada um desses objetivos. Porém, é necessário saber exatamente o que é mais importante para a sua organização. Como saber o que é mais importante para a minha organização? Para responder a essa pergunta, você precisará dos conhecimentos de todas as disciplinas do Curso de Administração a Distância.

Existem algumas desculpas para não utilizar a Pesquisa Operacional. Uma delas é que se trata de um método muito complicado ou de que os seus benefícios seriam muito pequenos. Nenhuma dessas desculpas é verdadeira. Resolução de problemas sem o uso da Pesquisa Operacional gera soluções que não são ótimas, lucros menores e gastos desnecessários de recursos.

Se você tiver dificuldade em algum tópico, não desista! Leia novamente ou tire dúvidas com o seu tutor. O domínio da Pesquisa Operacional trará muitos benefícios, ajudando você a encontrar soluções melhores.

Desejo muito sucesso nos seus estudos!

Professor Cesar Duarte Souto-Maior

Sumário

Unidade 1 – Introdução à Pesquisa Operacional

Introdução à Pesquisa Operacional.	11
O que é Pesquisa Operacional?.	11
A Pesquisa Operacional é Útil?	12
Resumindo.	16
Atividades de aprendizagem.	17

Unidade 2 – Formulação de Problemas

Formulação de Problemas.	21
Formulação e Resolução.	21
Dificuldades Durante a Formulação de Modelos	22
Informações Necessárias para a Modelagem.	23
Modelo Matemático de Programação Linear.	23
Resumindo.	29
Atividades de aprendizagem.	30

Unidade 3 – Resolução pelo Método Gráfico

Resolução pelo Método Gráfico	35
O que Significa Mesmo Resolver o Problema?.	36
Espaço de Soluções Possíveis.. . . .	36
Como Encontrar a Solução Ótima Graficamente?	40
Resumindo.	43
Atividades de aprendizagem.	44

Unidade 4 – Simplex

Simplex.	47
Preparação para Aplicação do Método Simplex.	47
Método Simplex.	48
Resumindo.	55
Atividades de aprendizagem.	56

Unidade 5 – Problema de Transportes

O Problema de Transportes	59
As Duas Partes do Algoritmo de Transportes.	61
Parte 1 – Solução Inicial.	61
Método do Canto Noroeste	62
Método de Vogel (ou Método das Penalidades)	64
Parte 2 – Otimização.	66
Degenerescência.	70
Resumindo.	72
Atividades de aprendizagem.	73

Unidade 6 – Problema de Atribuição

Problema de Atribuição.	77
Algoritmo de Atribuição	78
Casos Especiais do Problema de Atribuição.	85
Resumindo.	91
Atividades de aprendizagem.	92

Referências.	93
----------------------	----

Minicurriculo.	94
------------------------	----

1

UNIDADE

Introdução à Pesquisa Operacional



Objetivo

Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de entender o conceito de pesquisa operacional e perceber a importância desses conhecimentos no processo administrativo e o seu potencial de utilização dentro das organizações.

Introdução à Pesquisa Operacional

Caro estudante,

Estamos iniciando esta Unidade e nela você vai saber o que é pesquisa operacional, qual a sua relação com a Estatística e a Matemática e sua utilidade na administração de uma empresa. Portanto, leia o texto a seguir com atenção e tendo dúvidas, entre em contato com seu tutor.

Bons estudos!

Uma das principais atividades de um administrador é tomar decisões. Bem, não só de um administrador, como de qualquer outra pessoa. Estamos sempre tomando decisões, seja no campo pessoal ou nas organizações em que atuamos.

Em geral, boas decisões conduzem a bons resultados e decisões ruins conduzem a resultados ruins.

Além disso, em muitos casos é importante não apenas tomar boas decisões, como também justificar as decisões tomadas. Por exemplo, quando o **COPOM** define uma nova taxa de juros precisa explicar porque tomou aquela decisão.

Existem várias formas de tomar decisões. O enfoque da pesquisa operacional é possibilitar a tomada de decisões com o uso de técnicas quantitativas.

COPOM – é o Comitê de Política Monetária do Banco Central. A função desse grupo é definir as diretrizes da política monetária e a taxa básica de juros do País. As reuniões do grupo são mensais. O Copom é composto pelos oito membros da Diretoria Colegiada do Banco Central e é presidido pelo presidente da autoridade monetária. Também integram o grupo de discussões os chefes de departamentos, consultores, o secretário-executivo da diretoria, o coordenador do grupo de comunicação institucional e o assessor de Imprensa. Fonte: Invertia (2003).

O que é Pesquisa Operacional?

Podemos conceituar a Pesquisa Operacional como um método científico para tomada de decisões. Essa metodologia utiliza várias técnicas e modelos matemáticos. Nesta disciplina, iremos aprender as técnicas de **Programação Linear**, o ramo mais conhecido e utilizado da Pesquisa Operacional.

Conforme Andrade (2000), o nome Programação Linear deriva do fato das relações matemáticas serem todas equações ou inequações lineares.

Loesch e Hein (1999) apresentam uma boa

introdução sobre a história da Pesquisa Operacional.

Mas a Pesquisa Operacional engloba muitas outras técnicas, entre elas podemos citar: Teoria das Filas, Programação Dinâmica e Simulação Monte Carlo. Outra técnica são as redes **PERT/CPM** assunto que será abordado na disciplina de *Elaboração e Administração de Projetos*.

A **Pesquisa Operacional** busca encontrar a solução ótima, a melhor alternativa entre todas as opções disponíveis para um determinado problema. Os problemas de Pesquisa Operacional podem ser de maximização ou de minimização.

Se o nosso objetivo for encontrar o maior valor possível, temos um problema de maximização. Por exemplo, maximizar a receita significa encontrar a alternativa (solução ótima) que irá gerar a maior receita.

Se o nosso objetivo for encontrar o menor valor possível, temos um problema de minimização. Por exemplo, minimizar o consumo de energia significa encontrar a alternativa (solução ótima) que irá gerar o menor consumo de energia.



Tô a fim de saber

PERT/CPM

O método PERT – Program Evaluation and Review Technique – ou, em português, Técnica de Avaliação e Revisão de Projetos foi elaborado em 1958 pela Marinha americana e utilizado inicialmente no planejamento e controle do projeto Polaris, um míssil norte-americano. O método CPM – Critical Path Method – ou Método do Caminho Crítico é atribuído a James Kelley Jr., da Remington Rand, e Morgan Walker, da Dupont de Nemours, que o desenvolveram em 1957. Ambos os métodos são considerados técnicas de redes e baseados na Teoria dos Grafos, e classificados como modelos pictóricos de pesquisa operacional. Fonte: Roberto (2007).

Você deve estar se perguntando se a Pesquisa Operacional tem algo a ver com outras disciplinas que você cursou, como *Matemática para Administradores* e *Estatística Aplicada à Administração*.

Sim, a Pesquisa Operacional utiliza conhecimentos que você aprendeu em Matemática e Estatística para aprimorar o processo de decisão. Mas, lembre-se que a Pesquisa Operacional não é um sinônimo de Matemática ou Estatística.

A Pesquisa Operacional é Útil?

Talvez você esteja se perguntando “Na minha empresa se tomam muitas decisões, mas ninguém aplica técnicas de Pesquisa Operacional. E a empresa consegue exercer as suas atividades. Será que Pesquisa Operacional é realmente útil?”

O que acontece é que conseguimos encontrar soluções sem a Pesquisa Operacional. Entretanto, geralmente essas soluções não são soluções ótimas. Ou seja, conseguimos realizar as atividades da orga-

nização, porém gastando mais recursos e obtendo menos benefícios do que poderíamos se utilizássemos a Pesquisa Operacional.

Como exemplo, vamos mostrar um problema simples. Suponha que exista um produto especial que será retirado de 3 fábricas (localizadas em Fortaleza, Salvador e Vitória) e transportado para 3 armazéns (localizados em Curitiba, Goiânia e Maceió). De cada fábrica sairá apenas um produto, da mesma forma, cada armazém poderá guardar apenas um produto. Como deverá ser feito o transporte? O objetivo é minimizar a quilometragem total. Nesse problema estamos supondo que todos os gastos com o transporte (combustível, desgaste etc.) são proporcionais à quilometragem.

Como você resolveria esse problema sem usar a pesquisa operacional e sem nenhum dado numérico?

Uma alternativa seria olhar no mapa do Brasil a localização de cada uma dessas cidades e tentar fazer a alocação com a menor quilometragem.

Na Figura 1 temos o mapa do Brasil e a localização das fábricas e dos armazéns do nosso problema.



Figura 1: Localização das Fábricas e dos Armazéns

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Uma alternativa muito usada é identificar quais são as cidades mais próximas. No nosso problema as cidades mais próximas são Salvador e Maceió. Assim, um dos transportes pode ser de Salvador para Maceió. Das demais cidades, as mais próximas são Vitória e Curitiba e por fim temos Fortaleza e Goiânia.

Então uma solução para o problema poderia ser os seguintes transportes:

- de Fortaleza para Goiânia;
- de Salvador para Maceió; e
- de Vitória para Curitiba.

A soma desses três trajetos resulta em 4.414 km.

Parece ser uma boa solução, não é?

Sim, é uma solução razoável. Entretanto, essa não é a solução ótima!

Esse problema possui 6 soluções possíveis, sendo que a solução ótima consiste nos seguintes transportes:

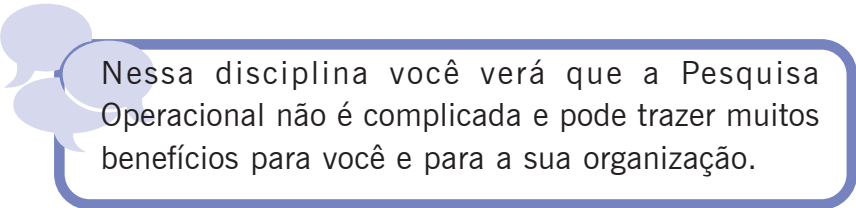
- de Fortaleza para Maceió;
- de Salvador para Goiânia; e
- de Vitória para Curitiba.

A soma desses três trajetos resulta em 4.018 km.

A primeira solução que tínhamos encontrado consumia 396 km a mais do que a solução ótima! Quase 10% a mais!

10% é um número considerável. Basta olhar o noticiário. Imagine o governo conseguindo reduzir 10% dos seus gastos. Ou uma empresa aumentando 10% do seu lucro. Ou a diminuição de 10% da emissão de gás carbônico.

Mesmo assim, existe uma grande resistência à utilização da Pesquisa Operacional. A principal desculpa para não utilizá-la é que seria uma técnica muito complicada e que traria um benefício pequeno.

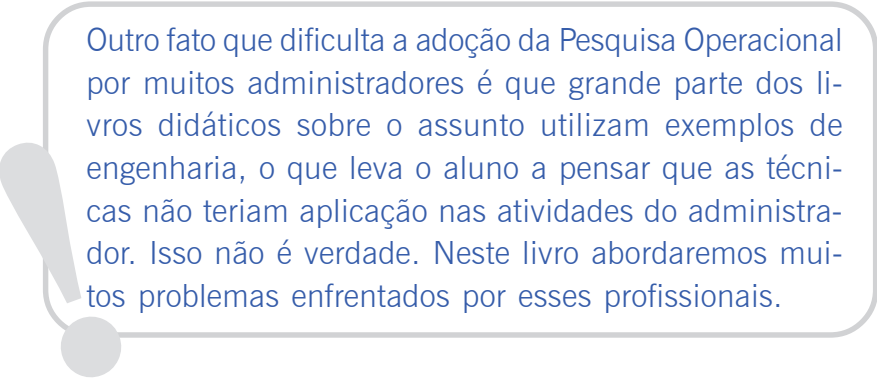


Nessa disciplina você verá que a Pesquisa Operacional não é complicada e pode trazer muitos benefícios para você e para a sua organização.

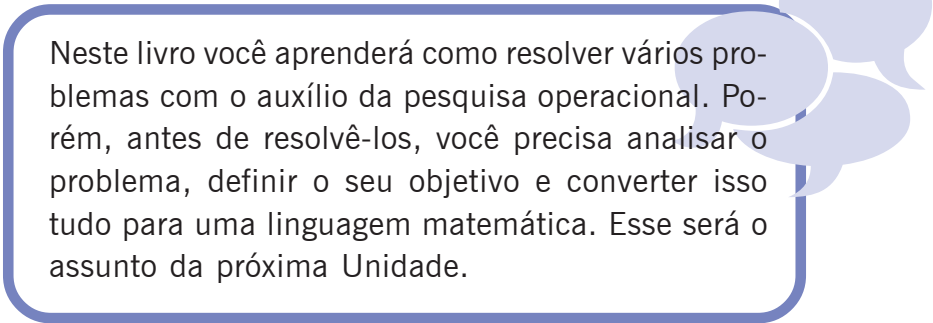
Ainda sobre o problema anterior, você pode estar se perguntando: “Mas eu não poderia ter calculado todas as combinações possíveis e encontrado a solução ótima?”.

Sim, o problema anterior tinha apenas 6 soluções possíveis e dessa forma seria fácil encontrar a solução ótima.

Mas e se fosse um problema um pouco mais complicado? Por exemplo, um problema com 10 fábricas e 10 armazéns possui 3.628.800 soluções possíveis! Calcular todas essas possíveis soluções seria muito trabalhoso e encontrar a que fosse ótima sem usar Pesquisa Operacional é praticamente impossível!



Outro fato que dificulta a adoção da Pesquisa Operacional por muitos administradores é que grande parte dos livros didáticos sobre o assunto utilizam exemplos de engenharia, o que leva o aluno a pensar que as técnicas não teriam aplicação nas atividades do administrador. Isso não é verdade. Neste livro abordaremos muitos problemas enfrentados por esses profissionais.



Neste livro você aprenderá como resolver vários problemas com o auxílio da pesquisa operacional. Porém, antes de resolvê-los, você precisa analisar o problema, definir o seu objetivo e converter isso tudo para uma linguagem matemática. Esse será o assunto da próxima Unidade.

Resumindo



Aprendemos nesta Unidade que a Pesquisa Operacional é uma metodologia para tomada de decisões, que engloba várias técnicas.

Através de um exemplo, conseguimos entender o que acontece quando resolvemos problemas sem usar a pesquisa operacional: obtemos soluções que não são tão eficientes, com lucros menores e gastos desnecessários de recursos.



Nesta disciplina o nosso enfoque será a Programação Linear, pois é a técnica mais conhecida e utilizada de Pesquisa Operacional. Durante nosso aprendizado, usaremos conhecimentos das disciplinas de Matemática e Estatística que aprendemos nos semestres anteriores. Mas é preciso lembrar que Pesquisa Operacional não é sinônimo nem de Matemática nem de Estatística.



Atividades de aprendizagem

1. Pesquise na internet definições de Pesquisa Operacional.
2. Liste três itens que poderiam ser maximizados (na organização em que você trabalha ou na sua vida particular).
3. Liste três itens que poderiam ser minimizados (na organização em que você trabalha ou na sua vida particular).
4. Assinale a alternativa correta. Pesquisa Operacional...
 - (a) é sinônimo de matemática.
 - (b) é sinônimo de estatística.
 - (c) usa conhecimentos de matemática e estatística para aprimorar o processo de decisão.

2

UNIDADE

Formulação de Problemas



Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de definir objetivos, coletar dados e converter as informações disponíveis em um modelo matemático de programação linear, além de perceber a importância da formulação de problemas.

Formulação de Problemas

Caro estudante!

Na Unidade anterior vimos que a técnica mais conhecida de Pesquisa Operacional é a Programação Linear. Agora vamos estudar esse modelo e a forma de utilizá-lo. Fique atento na formulação de problemas e perceba como colher informações para a resolução dos mesmos.

Se precisar, estamos à disposição!

Bom estudo!

Para poder aplicar a Programação Linear nos nossos problemas, precisamos executar duas etapas: (1) formulação do modelo matemático e (2) resolução. A Figura 2 mostra essas duas etapas.

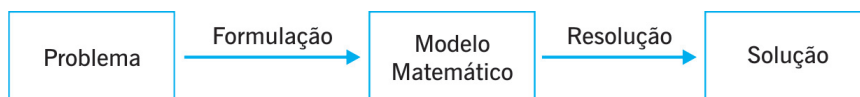


Figura 2: Etapas de Aplicação da Programação Linear

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Na **etapa de formulação**, precisamos transformar o nosso problema em um modelo matemático.

Na etapa de resolução, precisamos aplicar as técnicas de programação linear no modelo e encontrar a solução ótima.

Nesta Unidade, abordaremos a formulação de modelos e nas próximas unidades o enfoque será a resolução dos modelos para obtenção da solução final.

Formulação e Resolução

Qual é a etapa mais importante? Formulação ou Resolução?

O tópico 2.1 de Silva *et al.* (1994) é um

bom texto sobre formulação de modelos.

As duas etapas são importantes, porém algumas considerações precisam ser feitas.

A maioria dos livros sobre programação linear enfatiza a resolução do modelo matemático. Muito pouco é comentado sobre a **formulação de modelos**, muitas vezes apenas um ou dois parágrafos.

Na etapa de formulação de modelos é necessário juntar os dados particulares de cada organização. E isso não pode ser feito por outras pessoas, precisa ser feito por alguém que realmente conheça a organização.

Já na etapa de resolução de problemas, você pode pedir ajuda para algum especialista em programação linear ou então contratar uma consultoria. Depois que o modelo matemático foi elaborado, todo bom conhecedor das técnicas de Programação Linear pode facilmente obter a solução do problema.

Dificuldades Durante a Formulação de Modelos

Não existe uma forma única para formulação de modelos. É uma tarefa complicada e que depende de muitos fatores.

As informações que serão utilizadas geralmente apresentam as seguintes características:

- não estão em um único lugar, estão espalhadas nos vários departamentos de uma organização;
- são imprecisas; e
- ninguém tem essas informações. Precisam ser coletadas ou estimadas.

Embora seja uma etapa complicada, a sequência de passos que será descrita no próximo tópico é uma maneira que pode facilitar a formulação de problemas.

Informações Necessárias para a Modelagem

Para realizar a modelagem, precisamos responder três perguntas importantes:

- Qual é o objetivo? O que queremos maximizar (ou minimizar)?
- Quais são as variáveis de decisão?
- Quais são as restrições?

A definição do **objetivo**, não é tão óbvia quanto parece ser. Em uma determinada situação, o objetivo pode ser aumentar a base de clientes mesmo que o lucro seja menor. Em outra situação, o objetivo pode ser maximizar o lucro. Isso depende da estratégia de cada organização.

As **variáveis de decisão** são os fatores que estão dentro do poder de decisão do administrador e podem ser escolhidas por ele. Por exemplo, o administrador pode definir quantos itens serão fabricados de um determinado modelo.

As **restrições** são os fatores que estão fora do poder de decisão do administrador e não podem ser escolhidas por ele. Por exemplo, o administrador não pode definir a demanda de um determinado produto.

Modelo Matemático de Programação Linear

O modelo matemático de programação linear pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \text{(objetivo)} \\ \text{restrições} \left\{ \begin{array}{l} \text{(restrição1)} \\ \text{(restrição2)} \\ \dots \\ \text{(restriçãoN)} \end{array} \right. \end{array}$$

Você deve estar se perguntando: “Se é um modelo matemático, onde estão as equações?”.

Cada termo em parênteses corresponde a uma equação linear, que depende das variáveis de decisão. Como pode ser visto, existe apenas um objetivo para cada modelo. Já para as restrições, não existe limite, por isso podemos ter várias restrições para um mesmo modelo.

Vejamos dois exemplos para a melhor compreensão do que foi dito até aqui.

Exemplo 1. Empresa de consultoria

Uma empresa presta consultoria para pessoas físicas e pessoas jurídicas (organizações). Os serviços prestados são de alta qualidade e há uma grande procura pelos seus serviços. A empresa pode escolher quantos clientes de cada tipo irá atender. Porém, existe uma demanda máxima para cada tipo de cliente. Suponha também que essa empresa queira maximizar a receita.

E os números? Os números para esse problema serão fornecidos mais tarde. Vamos tentar modelar de forma textual.

As nossas variáveis de decisão são:

x_1 = quantidade de clientes que são pessoas físicas; e

x_2 = quantidade de clientes que são pessoas jurídicas.

E o modelo matemático será expresso da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} (\text{max receita}) \\ \text{restrições} \left\{ \begin{array}{l} \text{demanda } (x_1) \\ \text{demanda } (x_2) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

A função objetivo é maximizar a receita. As duas primeiras restrições são as demandas de cada tipo de cliente. Ou seja, quantos clientes de cada tipo procuram pelos serviços de consultoria. Já as duas últimas restrições são de não-negatividade, ou seja, significam que a quantidade de cada tipo de cliente não pode ser negativa.

Colocar o modelo de forma textual já é um bom começo. Agora vamos colocar alguns dados numéricos.

Suponha que o valor cobrado por uma consultoria seja de um salário mínimo para uma pessoa física e de três salários mínimos para

uma pessoa jurídica. Suponha também que a procura de clientes do tipo pessoa física seja de no máximo 15 clientes por mês. Já a procura de clientes do tipo pessoa jurídica seria de no máximo 10 clientes por mês.

Como passar essas informações para equações?

A receita mensal será a soma das receitas obtidas com cada tipo de cliente:

$$receita = x_1 + 3x_2$$

As demandas de cada tipo de cliente serão representadas da seguinte forma:

$$x_1 \leq 15$$

$$x_2 \leq 10$$

Agora já podemos substituir essas equações no nosso modelo:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{restrições} \begin{cases} x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pronto, o modelo matemático está pronto!

E se quisermos colocar outras restrições?

Por exemplo, digamos que a consultoria para um cliente pessoa física utilize 8 horas de trabalho e que a consultoria para um cliente pessoa jurídica utiliza 20 horas de trabalho. Além disso, que a quantidade total de horas disponíveis seja de 160 horas.

A equação dessa restrição ficaria da seguinte forma:

$$8x_1 + 20x_2 \leq 160$$

Com essa nova restrição o nosso modelo ficaria assim:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 8x_1 + 20x_2 \leq 160 \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 2. Fábrica de móveis [este exemplo foi adaptado de Corrar e Theófilo (2004)]

Uma fábrica de móveis produz três tipos de produtos: cadeiras, mesas e baús. No processo de fabricação, esses produtos passam por dois departamentos: o departamento de montagem e o departamento de acabamento. A tabela a seguir mostra o tempo de cada produto em cada departamento e a capacidade total de cada departamento.

Tabela 1: Tempo de cada produto por departamento

DEPARTAMENTO	CADEIRA	MESA	BAÚ	CAPACIDADE TOTAL
Montagem	3h	3h	2h	30h
Acabamento	6h	3h	0h	48h

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Além disso, os preços de venda são os seguintes:

- Cadeira: R\$ 10,00.
- Mesa: R\$ 8,00.
- Baú: R\$ 1,00.

Na prática, não é assim que você encontrará os problemas na sua empresa, com todos os dados prontos. Você precisará entrar em contato com o setor de vendas para obter os preços. Para encontrar os tempos de fabricação, precisará interagir com o setor de produção, e talvez até seja necessário fazer uma coleta de dados.

Vamos voltar ao nosso problema. Está sentindo falta de algo? Pense um pouco.

Não foi especificada a função objetivo, ou seja, o que deve ser maximizado ou minimizado. No dia a dia das organizações, isso também nem sempre estará claro. Você precisará descobrir qual deve ser o objetivo.

Qual seria o objetivo desse problema? Pense um pouco.

Um dos objetivos possíveis é **maximizar a receita**. Grande parte dos exemplos didáticos envolve fatores monetários como receita, custo e lucro, mas existem outras possibilidades.

A fábrica pode querer **maximizar a quantidade de itens produzidos**. Assim, atenderia mais clientes e se tornaria mais conhecida.

A fábrica pode querer **maximizar a quantidade de mesas produzidas**. No futuro, os clientes precisariam comprar cadeiras para essas mesas.

Há várias possibilidades para a função objetivo. Depende de você escolher o que será melhor para a sua empresa.

Para esse problema as variáveis de decisão são:

x_1 = quantidade de cadeiras produzidas

x_2 = quantidade de mesas produzidas

x_3 = quantidade de baús produzidos

Isso é o que o administrador pode decidir.

As duas restrições são as capacidades de cada departamento.

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 48$$

E a função objetivo?

Se o objetivo for maximizar a receita, o modelo 1 será:

$$\max z_1 = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se o objetivo for maximizar a quantidade de itens produzidos, o modelo 2 será:

$$\max z_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se o objetivo for maximizar a quantidade de mesas produzidas, o modelo 3 será:

$$\max z_3 = x_2$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nas próximas Unidades você aprenderá como resolver o problema. Mas vamos ver qual seria a solução ótima obtida com cada modelo. A tabela a seguir, mostra os resultados obtidos.

Tabela 2: Resultados do exercício

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
Valor de x_1	6	0	0
Valor de x_2	4	0	10
Valor de x_3	0	15	0
Receita	92	15	80
Itens Produzidos	10	15	10
Mesas Produzidas	4	0	10

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que a programação linear apresentou como resultado exatamente o que foi definido na função objetivo.

O objetivo do modelo 1 era maximizar a receita, e a solução do modelo é a combinação que resulta na maior receita: R\$ 92,00.

O objetivo do modelo 2 era maximizar a quantidade de itens produzidos, e a solução do modelo é a combinação que resulta na maior quantidade de itens produzidos: 15 itens.

O objetivo do modelo 3 era maximizar a quantidade de mesas, e a solução do modelo é a combinação que resulta na maior quantidade de mesas: 10 mesas.

Você deve ter muito cuidado na formulação do problema. Deve ser definido o que realmente é o melhor para a sua empresa.

Resumindo



Aprendemos nesta Unidade a importância da formulação de modelos na aplicação da programação linear e que a modelagem é uma tarefa complexa, a qual envolve a obtenção de informações espalhadas e desestruturadas. Além disso, a formulação de modelos não pode ser terceirizada, precisa ser realizada por quem realmente conhece os problemas da organização.

Para realizar a modelagem é necessário responder a três perguntas: Qual é o objetivo? Qual são as variáveis de decisão? Quais são as restrições?

A função objetivo deve ser escolhida com cuidado e deve corresponder aos objetivos da sua organização. As variáveis de decisão são os fatores que estão dentro do poder de decisão do administrador e podem ser escolhidas por ele. As restrições são os fatores que estão fora do poder de decisão do administrador e não podem ser escolhidas por ele.

Depois que o modelo matemático está montado, basta aplicar as técnicas de programação linear e resolver o modelo.

A resolução do modelo de programação linear será o assunto das próximas Unidades e para que você consiga resolver tais modelos é necessário saber como formular os modelos matemáticos, por isso, não deixe de fazer as *Atividades de aprendizagem* a seguir, nela você terá a oportunidade de treinar a formulação dos modelos.



Atividades de aprendizagem

Encontre o modelo de programação linear para cada um dos problemas a seguir:

1. Uma empresa quer utilizar anúncios para divulgar a sua nova linha de produtos, com o objetivo de atingir a maior quantidade de pessoas. Um anúncio na estação de rádio local custa R\$ 1.000,00 o minuto e atinge 5 mil pessoas. Um anúncio na estação de televisão local custa R\$ 5.000,00 o minuto e atinge 30 mil pessoas. A verba para propaganda é de R\$ 50.000,00. O diretor da empresa exigiu que a soma do tempo total dos anúncios (no rádio e na televisão) seja de pelo menos 15 minutos.
2. Uma fábrica produz três tipos de produtos: o produto A, o produto B e o produto C. O produto A utiliza 100 g de aço e 100 g de plástico. O produto B utiliza 150 g de aço e 200 g de plástico. O produto C utiliza 200 g de aço e 300 g de plástico. A quantidade total de aço disponível é de 20 kg e a quantidade de plástico disponível é de 30 kg. O objetivo é produzir a maior quantidade de produtos.
3. Um atacadista trabalha com dois produtos: o produto A e o produto B. Cada caixa do produto A custa R\$ 10,00 e ocupa 0,1 metros cúbicos e cada caixa do produto B custa R\$ 30,00 e ocupa 0,4 metros cúbicos. O armazém possui capacidade para armazenar 40 metros cúbicos de mercadorias. O fornecedor entrará em férias coletivas e o atacadista pretende encher o estoque, adquirindo a maior quantidade de caixas gastando no máximo R\$ 3.500,00.
4. Uma locadora aluga dois tipos de carros: carros econômicos e carros de luxo. O lucro mensal de um carro econômico é de R\$ 5.000,00 por mês e o lucro mensal de um carro de luxo é de R\$ 8.000,00. Tem apenas 10 vagas na garagem da locadora e é necessário ter pelo menos três carros de cada tipo. O objetivo é maximizar o lucro mensal.

5. Uma empresa fabrica dois tipos de produto: P1 e P2. Para realizar a fabricação esses produtos consomem tempo nos departamentos A e B.

P1 necessita de 1 hora no departamento A e 3 horas no departamento B. P2 necessita de 1 hora no departamento A e 2 horas no departamento B. A capacidade do departamento A é de 100 horas e a capacidade do departamento B é de 240 horas. A demanda por P1 é de 60 unidades e a demanda por P2 é de 80 unidades. Além disso, o preço de P1 é de R\$ 600,00 por unidade e o preço de P2 é de R\$ 800,00 por unidade. O objetivo é maximizar a receita.

3

UNIDADE

Resolução pelo Método Gráfico



Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de conhecer o Método Gráfico de resolução de problemas, e saber como construir a região de possíveis soluções e encontrar a solução ótima graficamente.

Resolução pelo Método Gráfico

Caro estudante!

Como você percebeu, à medida que vamos avançando tomamos conhecimento de novas formas de encontrar soluções para os problemas que se apresentam no dia a dia numa organização. Já vimos a formulação de modelos matemáticos e agora vamos ver a resolução pelo modelo gráfico. Caso tenha ficado com alguma dúvida, volte e releia os assuntos anteriores para que tenha um melhor aproveitamento desta Unidade.

Se precisar, estamos à disposição.

Para poder aplicar a Programação Linear nos nossos problemas, é necessário executar duas etapas: (1) formulação do modelo matemático e (2) resolução. Na Unidade anterior estudamos sobre a formulação de modelos. Nesta Unidade aprenderemos a resolver o problema de programação linear pelo método gráfico.

O método gráfico pode ser utilizado para duas ou três variáveis. Entretanto, na prática, ele é usado apenas para duas variáveis.

Você deve estar se perguntando: “Geralmente os problemas reais envolvem mais de duas variáveis, será que vale a pena aprender esse método?”.

Sim, vale a pena. Embora os problemas envolvam várias variáveis, muitas vezes é possível simplificar o problema e transformá-lo em um problema de duas variáveis. Por exemplo, uma operadora de telefonia celular possui muitos planos, mas pode decidir sua estratégia de marketing, agrupando esses planos em dois grandes grupos: clientes pré-pago e clientes pós-pago.

Com o problema simplificado, é possível utilizar o método gráfico para resolver o modelo. O método gráfico tem a vantagem de ser bem simples e de fácil compreensão.

O que Significa Mesmo Resolver o Problema?

Para que não fique dúvida, vamos lembrar o que significa a resolução de um problema. Por exemplo, no Exemplo 2 da Unidade anterior, se o nosso objetivo for maximizar a receita, o modelo será:

$$\max z_1 = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolver esse problema significa encontrar a combinação de valores para x_1 , x_2 e x_3 que resultará no maior valor de z . Ou seja, a maior receita. Nesse caso, os valores são $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 0$. O que resulta em R\$ 92,00. Não existe outra combinação de valores para esse problema que resulte em uma receita maior.

Se você não utilizar a programação linear, dificilmente obterá a solução ótima. Além disso, se alguém (por exemplo, seu chefe) questionar – “Essa é realmente a melhor solução? Será que não tem alguma outra solução que renda uma receita maior?” – você pode ter dificuldade para justificar as suas escolhas.

Porém, se você utilizar a programação linear, poderá afirmar que a solução é ótima, que não existe solução melhor, e pode apresentar os seus cálculos.

Espaço de Soluções Possíveis

No método gráfico, o primeiro passo é encontrar a região de possíveis soluções.

O que isso significa?

É uma região no gráfico onde estarão os valores que as variáveis de decisão podem assumir sem que as restrições sejam violadas.

Você se lembra do [exemplo 1](#) (empresa de consultoria) da Unidade anterior? Vamos encontrar a região de possíveis soluções para esse problema.

O modelo matemático encontrado naquele exemplo é o seguinte:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 8x_1 + 20x_2 \leq 160 \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Retome este exemplo para compreender melhor a explicação que segue.

Como temos duas variáveis de decisão, a região de possíveis soluções será representada em plano de duas dimensões, cada dimensão representando uma das variáveis.

Se não existisse nenhuma restrição, a região de possíveis soluções seria representada pela Figura 3 a seguir, ou seja, todo o plano formado pelas retas x_1 e x_2 .

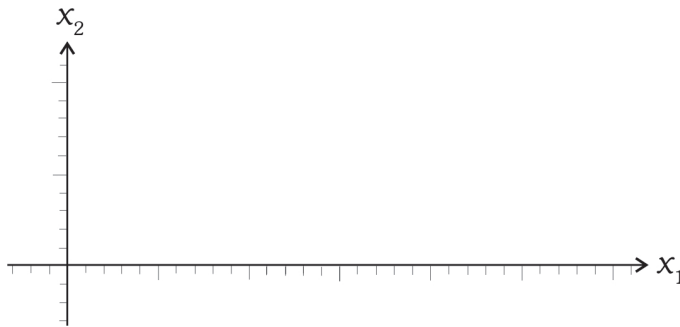


Figura 3: Plano formado por x_1 e x_2
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos ver o efeito das restrições na definição da região de possíveis soluções?

Começaremos com as duas restrições mais fáceis: as restrições de não-negatividade.

Para a restrição $x_1 \geq 0$, os valores de x_1 devem ser maiores ou iguais a zero. Ou seja, a região de possíveis soluções deve estar no semiplano ilustrado na Figura 4 a seguir:

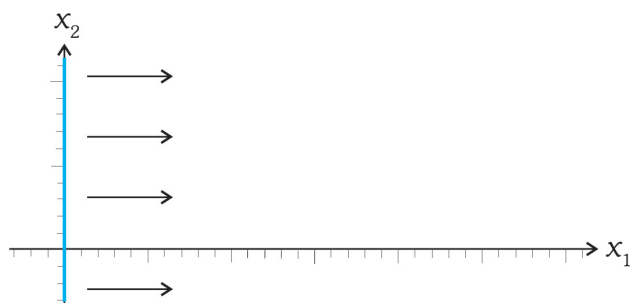


Figura 4: Semiplano delimitado por restrição de não-negatividade de x_1
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para a restrição $x_2 \geq 0$, os valores de x_2 devem ser maiores ou iguais a zero. Ou seja, a região de possíveis soluções deve estar no semiplano ilustrado na Figura 5 a seguir:

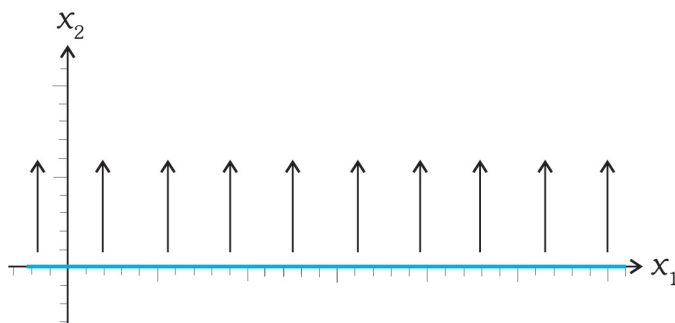


Figura 5: Semiplano delimitado por restrição de não-negatividade de x_2
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora vamos analisar as restrições de demanda. Vamos iniciar por $x_1 \leq 15$.

Por essa restrição, os valores de x_1 devem ser menores ou iguais a quinze. Ou seja, a região de possíveis soluções deve estar no semiplano ilustrado na Figura 6 a seguir:

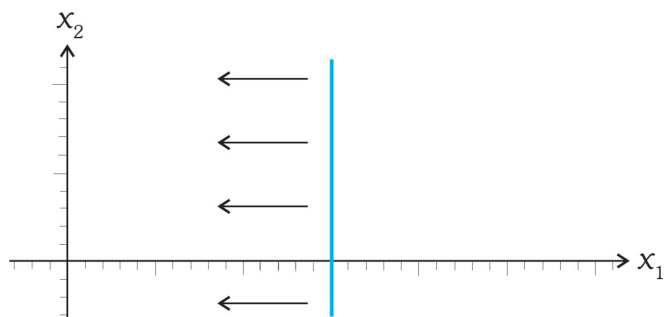


Figura 6: Semiplano delimitado por restrição de demanda de x_1
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para a restrição $x_2 \leq 10$, os valores de x_2 devem ser menores ou iguais a dez. Ou seja, a região de possíveis soluções deve estar no semi-plano ilustrado na Figura 7 a seguir:

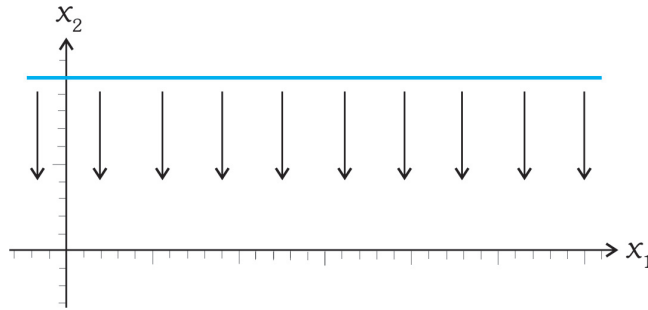


Figura 7: Semiplano delimitado por restrição de demanda de x_2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora vamos analisar a restrição de capacidade, dada pela expressão $8x_1 + 20x_2 \leq 160$.

Como você deve ter percebido pelos exemplos anteriores, cada restrição é uma reta que delimita um semiplano. Essa reta será:

$$8x_1 + 20x_2 = 160$$

Para podermos traçar essa reta no plano basta encontrar dois pontos.

Vamos encontrar o ponto em que a reta toca o eixo x_1 e o ponto em que a reta toca o eixo x_2 .

Quando $x_1 = 0$ (eixo x_2). Encontramos que $x_2 = 8$.

Quando $x_2 = 0$ (eixo x_1). Encontramos que $x_1 = 20$.

Com esses dois pontos a restrição fica assim:

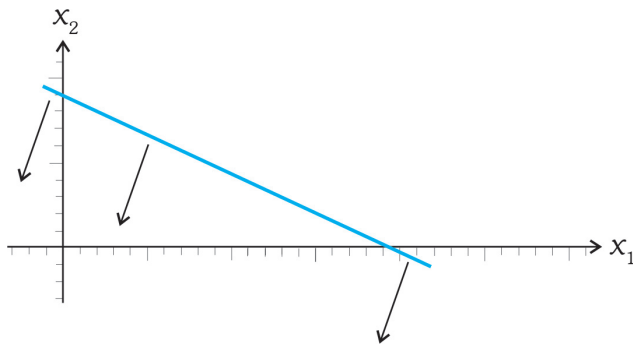


Figura 8: Semiplano delimitado por restrição de capacidade

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora vamos juntar todas as restrições. O espaço de possíveis soluções é o espaço ilustrado na Figura 9 a seguir:

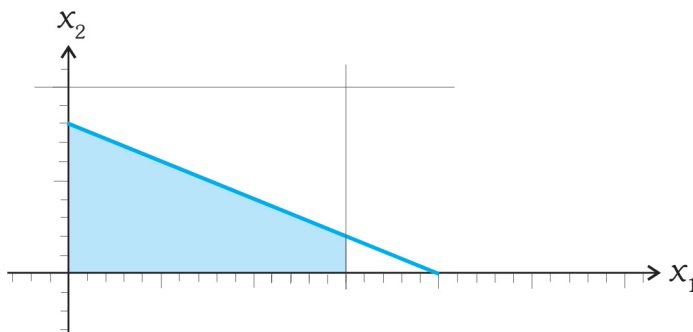


Figura 9: Espaço de Possíveis Soluções

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O que essa região significa? Significa que os valores possíveis de solução estão nessa região. E a solução ótima também está nessa região.

Onde estará a solução ótima? Isso você descobrirá no próximo tópico.

Como Encontrar a Solução Ótima Graficamente?

Já temos a região de possíveis soluções e agora precisamos encontrar a solução ótima.

Bem, vamos analisar a função objetivo, dada por $z = x_1 + 3x_2$.

Para cada valor de z , podemos definir uma reta cujos valores de x_1 e x_2 determinam esse valor de z . Vamos traçar algumas dessas retas. Para isso vamos precisamos de dois pontos: o que cruza o eixo x_1 e o que cruza o eixo x_2 .

Primeira reta: $z = 9$.

Se $x_1 = 0$, então $x_2 = 3$. Se $x_2 = 0$, então $x_1 = 9$.

Esses dois pontos determinam a reta $z = 9$.

Segunda reta: $z = 15$.

Se $x_1 = 0$, então $x_2 = 5$. Se $x_2 = 0$, então $x_1 = 15$.

Terceira reta: $z = 24$.

Se $x_1 = 0$, então $x_2 = 8$. Se $x_2 = 0$, então $x_1 = 24$.

Todas essas três retas estão representadas na Figura 10 a seguir.

Repare que essas retas são paralelas e crescem conforme se afastam da origem. Na Figura 10 também representamos o sentido no qual a função objetivo cresce.

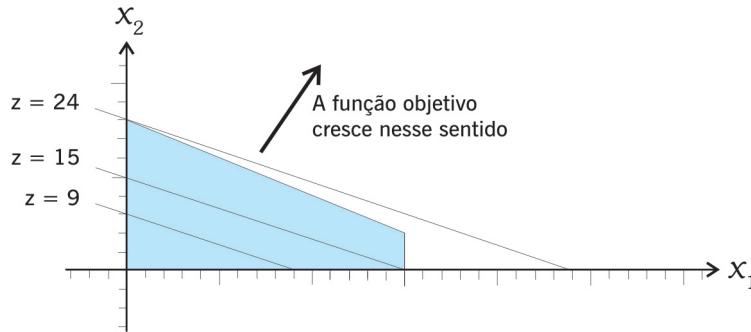


Figura 10: Retas representando vários valores de z

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A Figura 11 a seguir representa o ponto ótimo do modelo. Para valores de z superiores a 24, a reta não passará pela região de possíveis soluções.

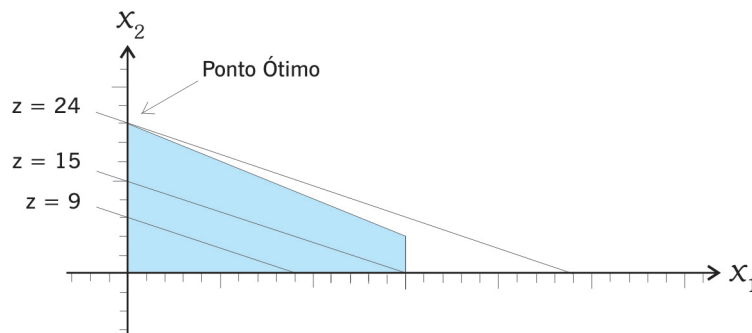


Figura 11: Ponto Ótimo

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

E como encontrar os valores de x_1 , x_2 e z para o ponto ótimo?

A solução ótima estará em um dos vértices da região de possíveis soluções. E cada vértice é formado pela interseção de duas retas.

No nosso exemplo, o ponto ótimo é a interseção de duas retas:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 20x_2 &= 160 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

O ponto ótimo satisfaz as equações dessas duas retas. Portanto, basta resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 8x_1 + 20x_2 = 160 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \\ z = 24 \end{cases}$$

Saiba mais...

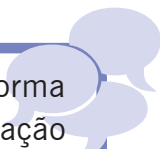
Você pode aprender mais sobre resolução de sistemas de equações lineares no livro de Steinbruck e Winterle (1987).

Resumindo



Nesta unidade você aprendeu a utilizar o método gráfico para resolver um problema de duas variáveis. Pelo método gráfico, cada restrição precisa ser representada em um gráfico formado pelos eixos das variáveis x_1 e x_2 . A junção de todas as restrições forma o espaço de possíveis soluções.

Depois de encontrar o espaço de possíveis soluções é necessário assumir alguns valores para a função objetivo (z). Com esses valores, podemos traçar uma reta para cada valor de z e perceber para onde a função objetivo cresce. Consequentemente, é possível visualizar qual é a solução ótima graficamente. A solução ótima estará localizada em um dos vértices da região de possíveis soluções, ou seja, está localizada na interseção de duas retas. Para encontrar os valores de x_1 , x_2 e consequentemente z , basta resolver um sistema de equações lineares com as duas retas que passam pelo ponto ótimo.



Na próxima Unidade você aprenderá uma forma geral de resolução de problemas de programação linear: o método simplex. Enquanto o método gráfico pode ser utilizado para duas variáveis, o método simplex pode ser utilizado para qualquer número de variáveis. Mas antes de partir para o próximo ponto, exercite o conteúdo das Unidades anteriores nas *Atividades de aprendizagem* a seguir.



Atividades de aprendizagem

Resolva cada um dos problemas a seguir utilizando o método gráfico.

1. Use os dados da questão 4 da Unidade 2.
2. Use os dados da questão 5 da Unidade 2.
3. Uma ONG (Organização Não Governamental) pretende comprar doces (balas e pirulitos) para as crianças de uma comunidade carente. Cada bala custa R\$ 0,05 e cada pirulito custa R\$ 0,15. A verba disponível para a compra de doces é de R\$ 1.500,00. Além disso, o fornecedor disse que pode fornecer no máximo 24.000 balas. Quantas balas e quantos pirulitos devem ser adquiridos? O objetivo é maximizar a quantidade de doces.
4. Encontre graficamente a solução ótima para o modelo a seguir:

$$\max z = 10x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4

UNIDADE

Simplex



Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de aprender a aplicar o método simplex na resolução de qualquer tipo de problema de programação linear.

Simplex

Caro estudante!

Na Unidade anterior aprendemos como resolver problemas de programação linear com duas variáveis utilizando o método gráfico. Nesta Unidade aprenderemos o método simplex. Este, pode ser aplicado para resolver qualquer problema de programação linear.

Então vamos conhecer essa nova ferramenta!

Bons estudos!

O Algoritmo Simplex utiliza conceitos de **Álgebra Linear**, em especial a resolução de sistemas de equações lineares.

Vale lembrar que o método simplex não é sinônimo de álgebra linear; ele utiliza conceitos da álgebra linear.

Você pode aprender mais sobre álgebra linear no livro de Steinbruck e Winterle (1987).

Preparação para Aplicação do Método Simplex

Vamos utilizar o método simplex para resolver o modelo matemático a seguir:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 110 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Algoritmo – conjunto das regras e procedimentos lógicos perfeitamente definidos que levam à solução de um problema em um número finito de etapas. Fonte: Houaiss (2009).

Como falamos, o simplex utiliza conceitos de resolução de sistemas de equações lineares. As restrições do modelo são inequações

(sinal de desigualdade), mas o método simplex trabalha com equações (sinal de igualdade).

Como podemos fazer para transformar essas inequações em equações?

Utilizaremos variáveis auxiliares, nesse caso chamadas de folgas. Uma folga para cada restrição. Assim as restrições ficam da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + Fa = 60 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + Fb = 60 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + Fc = 90 \end{cases}$$

Agora já podemos inserir as restrições em uma forma de tabela, também conhecida como *Tableau*.

Na Tabela 3 a seguir podemos observar as seis variáveis, as três restrições e a função objetivo. Essa forma de representação irá facilitar os nossos cálculos e facilitar o desenvolvimento do algoritmo.

Tabela 3: Tabela Preparatória para o Simplex

	VARIÁVEIS						b
	X1	X2	X3	Fa	Fb	Fc	
Restrição A	1	1	1	1			60
Restrição B	1	2	2		1		110
Restrição C	1	1	2			1	90
Objetivo	1	2	3				0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora que você já sabe como preparar os dados para o método simplex, vamos entender como se resolve uma programação linear através dele.

Método Simplex

Para resolver um sistema de equações lineares é necessário que o número de equações seja igual ao número de variáveis. Repare que temos três equações (as três restrições) e seis variáveis.

Para encontrar a solução inicial é necessário zerar três variáveis e encontrar o valor das outras três. Como solução inicial, vamos considerar $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

A Tabela 4 a qual traz a Solução 1 mostra as três variáveis que precisamos encontrar o valor. Como $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, encontramos que $Fa = 60$, $Fb = 110$ e $Fc = 90$. A solução ficou fácil porque os coeficientes da matriz formada pelas variáveis Fa , Fb e Fc já formavam uma matriz identidade.

Tabela 4: Solução 1

	VARIÁVEIS						b
	x_1	x_2	x_3	Fa	Fb	Fc	
Restrição A	1	1	1	1	0	0	60
Restrição B	1	2	2	0	1	0	110
Restrição C	1	1	2	0	0	1	90
Objetivo	1	2	3	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Logo, a Solução 1 será:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ Fa = 60 \\ Fb = 110 \\ Fc = 90 \\ z = 0 \end{cases}$$

Será que essa é a solução ótima? Será que alguma das variáveis que anulamos (x_1 , x_2 e x_3) poderia ser considerada para encontrar uma solução melhor?

Para isso, vamos olhar os valores da última linha. Note que os valores que estão embaixo de x_1 , x_2 e x_3 são positivos. Isso significa que se uma dessas variáveis for considerada o valor de z aumentará. Como o objetivo é uma função de maximização, é interessante que

uma dessas variáveis seja considerada. Qual delas? Escolheremos a que tem o maior valor positivo, ou seja, x_3 .

Para continuar tendo três equações e três variáveis, é necessário que uma das variáveis da solução atual seja anulada. Qual delas?

A Tabela 5 a seguir mostra a variável que irá entrar (x_3). Na última coluna calculamos o quociente entre o valor da coluna b pelo respectivo coeficiente da variável que está entrando. O quociente de menor valor positivo indica a variável que sairá da solução. Nesse caso, F_c sai da solução.

Tabela 5: Variável que entrará (x_3) e variável que sairá (F_c)

	VARIÁVEIS							quociente
	X_1	X_2	X_3	Fa	Fb	F_c	b	
Restrição A	1	1	1	1	0	0	60	$60/1=60$
Restrição B	1	2	2	0	1	0	110	$110/2=55$
Restrição C	1	1	2	0	0	1	90	$90/2=45$
Objetivo	1	2	3	0	0	0	0	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora vamos calcular a nova solução. As variáveis x_1 , x_2 e F_c serão anuladas e consideraremos apenas as variáveis x_3 , F_a e F_b . A Tabela 6 que indica as Variáveis para a Solução 2 mostra as três variáveis escolhidas.

Tabela 6: Variáveis para a Solução 2

	VARIÁVEIS						b
	X_1	X_2	X_3	Fa	Fb	F_c	
Restrição A	1	1	1	1	0	0	60
Restrição B	1	2	2	0	1	0	110
Restrição C	1	1	2	0	0	1	90
Objetivo	1	2	3	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Precisamos transformar os coeficientes da matriz formada pelas variáveis escolhidas em algo parecido com a matriz identidade. O cruzamento entre a coluna da variável que entrou (x_3) com a linha de menor quociente indica o elemento pivô. Esse elemento será bastante

usado em nossos cálculos. A linha que contém o pivô será chamada de linha pivô. A Tabela 7 a seguir mostra o elemento pivô escolhido e a ordem das restrições.

Tabela 7: Elemento Pivô

	VARIÁVEIS						
	X1	X2	X3	Fa	Fb	Fc	b
Restrição A	1	1	1	1	0	0	60
Restrição B	1	2	2	0	1	0	110
Restrição C	1	1	2	0	0	1	90
Objetivo	1	2	3	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Iremos fazer operações com as linhas da tabela para zerar os elementos acima e abaixo do elemento pivô. Porém, para facilitar, vamos transformar o elemento pivô no número 1.

$$\text{Nova Linha 3} = (\text{Linha 3}) / 2$$

Assim, a nova tabela ficará:

Tabela 8: Linha pivô após operação

	VARIÁVEIS						
	X1	X2	X3	Fa	Fb	Fc	b
Restrição A	1	1	1	1	0	0	60
Restrição B	1	2	2	0	1	0	110
Restrição C	1/2	1/2	1	0	0	1/2	45
Objetivo	1	2	3	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que todos os elementos da linha 3 (linha pivô) foram divididos por 2.

Agora, as operações que serão efetuadas são:

$$\text{Nova Linha 1} = \text{Linha 1} - \text{Linha 3}$$

$$\text{Nova Linha 2} = \text{Linha 2} - 2 * (\text{Linha 3})$$

$$\text{Nova Linha 4} = \text{Linha 4} - 3 * (\text{Linha 3})$$

A Tabela 9 com a Solução 2 mostra o efeito dessas operações.

Tabela 9: Solução 2

	VARIÁVEIS						b
	x_1	x_2	x_3	Fa	Fb	Fc	
Restrição A	1/2	1/2	0	1	0	-1/2	15
Restrição B	0	1	0	0	1	-1	20
Restrição C	1/2	1/2	1	0	0	1/2	45
Objetivo	-1/2	1/2	0	0	0	-3/2	-135

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Logo, a Solução 2 será:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 45 \\ Fa = 15 \\ Fb = 20 \\ Fc = 0 \\ z = 135 \end{cases}$$

Será que essa é a solução ótima? Será que alguma das variáveis que anulamos (x_1 , x_2 e Fc) poderia ser considerada para encontrar uma solução melhor?

Para isso, vamos olhar os valores da última linha na Tabela 9. Note que os valores que estão embaixo de x_1 e Fc são negativos. Isso significa que se uma dessas variáveis for considerada o valor de z diminuirá. O valor que está embaixo de x_2 é positivo. Isso significa que se essa variável for considerada o valor de z aumentará. Como o objetivo é uma função de maximização, é interessante que essa variável (x_2) seja considerada.

Para continuar tendo três equações e três variáveis, é necessário que uma das variáveis da solução atual seja anulada. Qual delas?

A Tabela 10 a seguir mostra a variável que irá entrar (x_2). Na última coluna calculamos o quociente entre o valor da coluna b pelo respectivo coeficiente da variável que está entrando. O quociente de

menor valor positivo indica a variável que sairá da solução. Nesse caso, Fb sai da solução.

Tabela 10: Variável que entrará (x_2) e variável que sairá (Fb)

	VARIÁVEIS							quociente
	X_1	X_2	X_3	Fa	Fb	Fc	b	
Restrição A	1/2	1/2	0	1	0	-1/2	15	15/(1/2)=30
Restrição B	0	1	0	0	1	-1	20	20/1=20
Restrição C	1/2	1/2	1	0	0	1/2	45	45/(1/2)=90
Objetivo	-1/2	1/2	0	0	0	-3/2	-135	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora vamos calcular a nova solução. As variáveis x_1 , Fb e Fc serão anuladas e consideraremos apenas as variáveis x_2 , x_3 e Fa . A Tabela 11 com as Variáveis para a Solução 3 mostra as três variáveis escolhidas.

Tabela 11: Variáveis para a Solução 3

	VARIÁVEIS						
	X_1	X_2	X_3	Fa	Fb	Fc	b
Restrição A	1/2	1/2	0	1	0	-1/2	15
Restrição B	0	1	0	0	1	-1	20
Restrição C	1/2	1/2	1	0	0	1/2	45
Objetivo	-1/2	1/2	0	0	0	-3/2	-135

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Precisamos transformar os coeficientes da matriz formada pelas variáveis escolhidas em algo parecido com a matriz identidade. O cruzamento entre a coluna da variável que entrou (x_2) com a linha de menor quociente indicam o elemento pivô. Esse elemento será bastante usado em nossos cálculos. A linha que contém o pivô será chamada de linha pivô. A Tabela 12 a seguir mostra o elemento pivô escolhido e a ordem das restrições.

Tabela 12: Elemento Pivô

	VARIÁVEIS						
	X_1	X_2	X_3	Fa	Fb	Fc	b
Restrição A	1/2	1/2	0	1	0	-1/2	15
Restrição B	0	1	0	0	1	-1	20
Restrição C	1/2	1/2	1	0	0	1/2	45
Objetivo	-1/2	1/2	0	0	0	-3/2	-135

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Iremos fazer operações com as linhas da Tabela 12 para zerar os elementos acima e abaixo do elemento pivô.

As operações que serão efetuadas são:

$$\text{Nova Linha 1} = \text{Linha 1} - (1/2) * (\text{Linha 2})$$

$$\text{Nova Linha 3} = \text{Linha 3} - (1/2) * (\text{Linha 2})$$

$$\text{Nova Linha 4} = \text{Linha 4} - (1/2) * (\text{Linha 2})$$

A Tabela 13 que Solução 3 mostra o efeito dessas operações.

Tabela 13: Solução 3

	VARIÁVEIS						
	X1	X2	X3	Fa	Fb	Fc	b
Restrição A	1/2	0	0	1	-1/2	0	5
Restrição B	0	1	0	0	1	-1	20
Restrição C	1/2	0	1	0	-1/2	1	35
Objetivo	-1/2	0	0	0	-1/2	-1	-145

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Logo, a Solução 3 será:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 35 \\ Fa = 5 \\ Fb = 0 \\ Fc = 0 \\ z = 145 \end{cases}$$

Será que essa é a solução ótima? Será que alguma das variáveis que anulamos (x_1 , Fb e Fc) poderia ser considerada para encontrar uma solução melhor?

Para isso, vamos olhar os valores da última linha. Note que os valores que estão embaixo de x_1 , Fb e Fc são negativos. Isso significa que se uma dessas variáveis for considerada o valor de z diminuirá. Como o objetivo é uma função de maximização, não tem como ser obtida uma solução melhor. Logo, essa é a solução ótima.

Resumindo



Aprendemos nesta Unidade como aplicar o método simplex. Esse método pode ser aplicado para resolver qualquer problema de programação linear e está baseado em conceitos de álgebra linear, em especial, na resolução de sistemas de equações lineares.

Embora qualquer problema de programação linear possa ser resolvido com o simplex, certos problemas apresentam características particulares e podem ser resolvidos com algoritmos mais simples.



Na Unidade 5, aprenderemos como resolver o problema de transportes e na Unidade 6 aprenderemos como resolver o problema de atribuição. Mas antes de exercitar esses novos aprendizados, pratique o conteúdo da Unidade 4 com as *Atividades de aprendizagem* a seguir.



Atividades de aprendizagem

1. Resolva o problema usando o simplex:

$$\max z_3 = 10x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Resolva o problema usando o simplex:

$$\max z_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

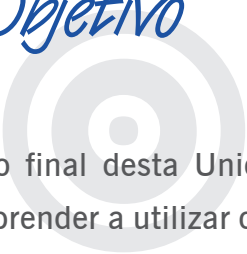
$$\text{restrições} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

5

UNIDADE

Problema de Transportes

Objetivo



Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de aprender a utilizar o algoritmo de transportes e saber o que fazer em situações onde ocorra degenerescência.

O Problema de Transportes

Caro estudante!

Na Unidade anterior estudamos o algoritmo simplex, pelo qual podemos resolver qualquer problema de programação linear. O assunto desta Unidade é o problema de transportes, que também pode ser resolvido com o uso do simplex, mas existe uma forma mais simples: o algoritmo de transportes, nosso foco nesta Unidade.

Caso você ainda tenha dúvidas sobre o que já foi estudado até este momento, volte e reveja os conceitos e suas aplicações.

Se precisar, estamos à disposição.

A Figura 12 a seguir apresenta um problema de transportes. Existem 60 toneladas de um determinado material que precisam ser transportadas de três origens para três destinos. Cada origem possui uma quantidade desse material disponível para ser transportada, e cada destino possui uma demanda desse material.

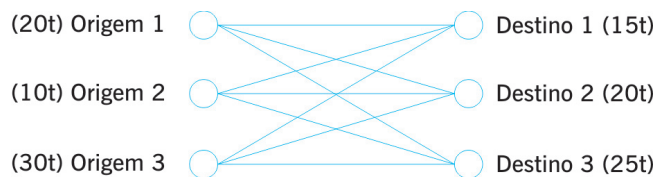


Figura 12: Exemplo de um problema de transportes

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que o material que está em cada origem pode ser transportado para qualquer um dos destinos. Existem várias formas de realizar os transportes necessários para atender as demandas dos três destinos. Porém, o ideal é realizar os transportes com o menor custo, ou seja, minimizar o custo.

Bem, para isso precisamos saber qual é o custo de transporte entre as origens e destinos. Vamos supor que o custo seja proporcional à distância (em km).

Na Tabela 14 a seguir, os custos (em km) entre as origens e os destinos são as células sombreadas. Podemos observar também as disponibilidades em cada origem e a demanda em cada destino.

Tabela 14: Enunciado de um problema de transporte

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	50	210	220	20
Origem 2	90	200	130	10
Origem 3	80	290	290	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O custo do transporte também pode ser representado como:

C_{ij} = custo do transporte da origem i para o destino j .

Por exemplo, $C_{11} = 50$.

Para facilitar a resolução do problema, iremos separar a Tabela 14 do Enunciado de um problema de transporte em duas outras: Tabela 15 de custos e Tabela 16 de transportes.

Tabela 15: Tabela de custos

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origem 1	50	210	220
Origem 2	90	200	130
Origem 3	80	290	290

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vejamos a seguir a Tabela 16 de transportes:

Tabela 16: Tabela de transportes

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1				20
Origem 2				10
Origem 3				30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

As células em branco representam a quantidades de toneladas que precisarão ser transportadas de cada origem para cada destino. A quantidade transportada pode ser representada da seguinte maneira:

X_{ij} = quantidade (em toneladas) transportadas da Origem i para o Destino j .

Onde i é o número da linha e j é o número da coluna.

As Duas Partes do Algoritmo de Transportes

O algoritmo de transportes é dividido em duas partes.

A primeira parte consiste em encontrar uma solução inicial para o problema e a segunda parte consiste em encontrar a solução ótima a partir da solução inicial.

Parte 1 – Solução Inicial

A solução inicial precisa atender dois requisitos: (1) precisa satisfazer as restrições de origem e destino e (2) não pode apresentar circuitos entre as variáveis básicas.

Segundo Silva *et al.* (1994), circuito pode ser entendido como uma poligonal fechada, construída no sentido das linhas ou colunas e ligando variáveis básicas. Na Tabela 17 temos um exemplo de circuito.

Tabela 17: Exemplo de circuito

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4
Origem 1	10	----	5	----
Origem 2	----	----	----	----
Origem 3	----	----	----	----
Origem 4	25	----	15	----
Origem 5	----	----	----	----

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Nesta disciplina aprenderemos dois métodos para encontrar a solução inicial: o método do canto noroeste e o método de Vogel.

Método do Canto Noroeste

Pelo método do canto noroeste, começaremos a alocar o transporte na célula que se encontra na parte superior e esquerda da tabela, ou seja, no canto noroeste. A Tabela 18 a seguir mostra a célula escolhida, que corresponde ao transporte entre a origem 1 e o destino 1.

Tabela 18: Alocação de transporte entre a origem 1 e o destino 1

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	15			$20 - 15 = 5$
Origem 2	----			10
Origem 3	----			30
Demanda (t)	$15 - 15 = 0$	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos tentar alocar o transporte máximo nessa célula. A origem 1 tem 20 toneladas disponíveis, mas o destino 1 demanda apenas 15 toneladas. Logo, o máximo que pode ser transportado é 15 toneladas.

Observe também que o destino 1 precisa de 15 toneladas e já foi totalmente atendido, então não haverá transporte entre as origens 2 e 3 e o destino 1. Além disso, sobram 5 toneladas disponíveis na origem 1 para atender outros destinos.

A Tabela 19 a seguir mostra a próxima célula escolhida. Das células não preenchidas, a que está na parte superior e esquerda corresponde ao transporte entre a origem 1 e o destino 2.

Tabela 19: Alocação de transporte entre a origem 1 e destino 2

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	15	5	----	$5 - 5 = 0$
Origem 2	----			10
Origem 3	----			30
Demanda (t)	0	$20 - 5 = 15$	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos tentar alocar o transporte máximo nessa célula. A origem 1 tem 5 toneladas disponíveis e o destino 2 demanda 20 toneladas. Logo, o máximo que pode ser transportado é 5 toneladas.

Observe também que a origem 1 não tem mais material disponível, então não haverá transporte entre a origem 1 e o destino 3. Além disso, faltam 15 toneladas para atender a demanda do destino 2.

A Tabela 20 a seguir mostra a próxima célula escolhida. Das células não preenchidas, a que está na parte superior e esquerda corresponde ao transporte entre a origem 2 e o destino 2.

Tabela 20: Alocação de transporte entre a origem 2 e destino 2

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	15	5	----	0
Origem 2	----	10	----	$10-10=0$
Origem 3	----			30
Demanda (t)	0	$15-10=5$	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos tentar alocar o transporte máximo nessa célula. A origem 2 tem 10 toneladas disponíveis e o destino 2 demanda 15 toneladas. Logo, o máximo que pode ser transportado é 10 toneladas.

Observe também que a origem 2 não tem mais material disponível, então não haverá transporte entre a origem 2 e o destino 3. Além disso, faltam 5 toneladas para atender à demanda do destino 2.

A Tabela 21 da Solução Inicial pelo Método do Canto Noroeste mostra o resultado da aplicação do método do canto noroeste.

Tabela 21: Solução Inicial pelo Método do Canto Noroeste

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	15	5	----	
Origem 2	----	10	----	
Origem 3	----	5	25	
Demanda (t)				

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Método de Vogel (ou Método das Penalidades)

O método de Vogel (também conhecido como método das penalidades) apresenta um grau de dificuldade maior que o método do canto noroeste. Porém, geralmente retorna uma solução inicial mais próxima da solução ótima.

Para iniciar o estudo deste método vamos utilizar as informações da Tabela 15 de custos. A Tabela 22 do Método de Vogel mostra os valores da tabela de custo e os valores da penalidade para cada linha e coluna.

Tabela 22: Penalidades de cada linha e de cada coluna

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Penalidade
Origem 1	50	210	220	160
Origem 2	90	200	130	40
Origem 3	80	290	290	210
Penalidade	30	10	90	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A penalidade de uma linha ou coluna é a diferença entre os dois menores custos de cada linha ou coluna. Por exemplo, na linha 1 o menor valor é 50 km e o segundo menor valor é 210 km. Se você não escolher o transporte de menor valor e escolher o segundo menor valor estará obtendo uma penalidade de 160 km (210 km – 50 km). Ou seja, seus caminhões estarão percorrendo 160 km a mais do que seria necessário.

Penalidade não é algo desejável. Então, pelo método, escolheremos a linha ou coluna com a maior penalidade. A linha três é a escolhida, pois apresenta uma penalidade de 210 km.

E o que faremos para evitar a maior penalidade? Faremos a alocação na célula da linha três que tem o menor custo (80 km). Essa célula corresponde ao transporte entre a origem 3 e o destino 1.

Na Tabela 23 a seguir, apresentamos uma tabela de transportes com a alocação máxima nessa célula escolhida.

Tabela 23: Alocação de transporte entre a origem 3 e destino 1

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	----			20
Origem 2	----			10
Origem 3	15			$30-15=15$
Demanda (t)	$15-15=0$	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que já foi feita a alocação para o destino 1, logo podemos recalculas as penalidades desconsiderando os valores da coluna 1. A Tabela 24 a seguir mostra os novos valores para as penalidades.

Tabela 24: Penalidades recalculadas, desconsiderando o destino 1

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Demanda (t)
Origem 1	----	210	220	10
Origem 2	----	200	130	70
Origem 3	----	290	290	0
Demanda (t)	----	10	90	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna três é a escolhida, pois apresenta a maior penalidade (90 km).

E o que faremos para evitar essa penalidade? Faremos a alocação na célula da coluna três que tem o menor custo (130 km). Essa célula corresponde ao transporte entre a origem 2 e o destino 3.

Na Tabela 25 a seguir, apresentamos uma tabela de transportes com a alocação máxima nessa célula escolhida.

Tabela 25: Alocação de transporte entre a origem 2 e destino 3

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	----			20
Origem 2	----	----	10	$10-10=0$
Origem 3	15			15
Demanda (t)	0	20	$25-10=15$	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que já foi feita a alocação para a origem 2, logo podemos recalculas as penalidades desconsiderando os valores da linha 2. A Tabela 26 a seguir mostra os novos valores para as penalidades.

Tabela 26: Penalidades recalculadas, desconsiderando a origem 2

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Penalidade (t)
Origem 1	----	210	220	10
Origem 2	----	----	----	----
Origem 3	----	290	290	0
Penalidade (t)	----	80	70	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna 2 é a escolhida, pois apresenta a maior penalidade (80 km).

A Tabela 27 da Solução Inicial pelo Método de Vogel mostra o resultado da aplicação desse método.

Tabela 27: Solução Inicial pelo Método de Vogel

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	----	20	----	
Origem 2	----	----	10	
Origem 3	15	----	15	
Demanda (t)				

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Parte 2 – Otimização

Depois de encontrar uma solução inicial é necessário verificar se a solução encontrada já é a solução ótima.

Vamos partir da solução inicial encontrada pelo método do canto noroeste, apresentada na Tabela 28 a seguir:

Tabela 28: Solução Inicial pelo Método do Canto Noroeste (Solução 1)

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	15	5	----	20
Origem 2	----	10	----	10
Origem 3	----	5	25	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que existem algumas células que apresentam valores positivos. Essas serão chamadas de variáveis básicas.

X_{11} – toneladas transportadas da origem 1 para o destino 1.

X_{12} – toneladas transportadas da origem 1 para o destino 2.

X_{22} – toneladas transportadas da origem 2 para o destino 2.

X_{32} – toneladas transportadas da origem 3 para o destino 2.

X_{33} – toneladas transportadas da origem 3 para o destino 3.

Para cada variável básica X_{ij} , obteremos uma equação do seguinte tipo:

$$C_{ij} - U_i - V_j = 0$$

Onde C_{ij} é o custo de transporte da origem i para o destino j . U_i e V_j são variáveis auxiliares relacionadas respectivamente com as linhas e com as colunas.

Para o nosso exemplo temos:

$$\begin{cases} C_{11} - U_1 - V_1 = 0 \\ C_{12} - U_1 - V_2 = 0 \\ C_{22} - U_2 - V_2 = 0 \\ C_{32} - U_3 - V_2 = 0 \\ C_{33} - U_3 - V_3 = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores de C_{ij} temos:

$$\begin{cases} 50 - U_1 - V_1 = 0 \\ 210 - U_1 - V_2 = 0 \\ 200 - U_2 - V_2 = 0 \\ 290 - U_3 - V_2 = 0 \\ 290 - U_3 - V_3 = 0 \end{cases}$$

Agora temos um sistema com 5 equações e 6 variáveis auxiliares. Para conseguir resolver é necessário escolher uma dessas variáveis auxiliares para ser zero. Considerando $U_1 = 0$, encontramos.

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = -10 \\ U_3 = 80 \\ V_1 = 50 \\ V_2 = 210 \\ V_3 = 210 \end{cases}$$

Em seguida, calculamos os coeficientes para as variáveis não básicas, usando a fórmula a seguir:

$$C_{ij} - U_i - V_j = ?$$

Como temos os valores de C_{ij} , U_i e V_j , podemos encontrar os coeficientes:

$$\begin{cases} C_{13} - U_1 - V_3 = 220 - 0 - 210 = 10 \\ C_{21} - U_2 - V_1 = 90 - (-10) - 50 = 50 \\ C_{23} - U_2 - V_3 = 130 - (-10) - 210 = -70 \\ C_{31} - U_3 - V_1 = 80 - 80 - 50 = -50 \end{cases}$$

Alguns coeficientes apresentaram valores positivos e outros apresentaram valores negativos. O que isso significa?

Os coeficientes de X_{13} e X_{21} apresentaram valores positivos. Isso significa que se acrescentarmos a variável X_{13} ou X_{21} em uma nova solução, o objetivo (quilometragem total) aumentará. Como queremos minimizar a quilometragem total a entrada de uma dessas variáveis irá piorar a solução.

Os coeficientes de X_{23} e X_{31} apresentaram valores negativos. Isso significa que se acrescentarmos a variável X_{13} ou X_{31} em uma nova solução, o objetivo (quilometragem total) diminuirá. Como queremos minimizar a quilometragem total, a entrada de uma dessas variáveis irá melhorar a solução.

Então qual variável será escolhida para a nova solução? X_{23} será escolhida pois o seu respectivo coeficiente apresenta o valor ne-

gativo com maior valor absoluto. Como não sabemos qual o valor da variável X_{23} daremos o valor θ .

A Tabela 29 do Efeito da entrada da variável X_{23} mostra o efeito da entrada dessa variável. Como as disponibilidades e as demandas não podem ser alteradas, é necessário realizar alterações nas variáveis X_{22} , X_{32} e X_{33} .

Tabela 29: Efeito da entrada da variável X_{23}

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidades (t)
Origem 1	15	5	----	20
Origem 2	----	$10-\theta$	θ	10
Origem 3	----	$5+\theta$	$25-\theta$	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O maior valor que θ pode assumir é 10. Logo a nova solução será:

Tabela 30: Solução 2

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidades (t)
Origem 1	15	5	----	20
Origem 2	----	----	10	10
Origem 3	----	15	15	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Será que essa solução é ótima?

Para verificar, basta aplicar o mesmo procedimento. Você descobrirá que ainda não chegou na solução ótima e que a nova solução será:

Tabela 31: Solução 3

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidades (t)
Origem 1	----	20	----	20
Origem 2	----	----	10	10
Origem 3	15	----	15	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Verifique isso! Utilize o mesmo procedimento.

Você também conseguiu chegar na mesma solução? Se não conseguiu tente novamente ou peça auxílio para o seu tutor.

Degenerescência

Degenerescência – redução ou declínio de qualidade. Fonte: Houaiss (2009).

Será que essa solução já é a solução ótima? Basta aplicar novamente o algoritmo. Porém, dessa vez temos somente 4 variáveis básicas (das outras vezes eram 5 variáveis básicas).

Conforme Shamblin e Stevens (1979), quando o número de variáveis básicas for menor do que $m + n - 1$, o problema é degenerado. No nosso problema, m (número de linhas) é três e n (número de colunas) é três. Então, $m + n - 1 = 5$. Como o número de variáveis básicas é menor que 5, então temos um caso de degenerescência.

Para poder prosseguir, é necessário acrescentar uma variável básica auxiliar **A**.

Consideramos o valor de **A** tão pequeno que não afeta a solução do problema, mas deve ser colocada em uma célula que não gere circuito. Assim a solução que testaremos será:

Tabela 32: Solução 3 com variável auxiliar A

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidades (t)
Origem 1	----	20	----	20
Origem 2	----	----	10	10
Origem 3	15	A	15	30
Demanda (t)	15	20	25	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

As variáveis básicas serão: X_{12} , X_{23} , X_{31} , X_{32} e X_{33} .

Para cada variável básica X_{ij} , obteremos uma equação do seguinte tipo:

$$C_{ij} - U_i - V_j = 0$$

Para o nosso exemplo temos:

$$\begin{cases} C_{12} - U_1 - V_2 = 0 \\ C_{23} - U_2 - V_3 = 0 \\ C_{31} - U_3 - V_1 = 0 \\ C_{32} - U_3 - V_2 = 0 \\ C_{33} - U_3 - V_3 = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores de C_{ij} temos:

$$\begin{cases} 210 - U_1 - V_2 = 0 \\ 130 - U_2 - V_3 = 0 \\ 80 - U_3 - V_1 = 0 \\ 290 - U_3 - V_2 = 0 \\ 290 - U_3 - V_3 = 0 \end{cases}$$

Agora temos um sistema com 5 equações e 6 variáveis auxiliares. Para conseguir resolver é necessário escolher uma dessas variáveis auxiliares para ser zero. Considerando $U_1 = 0$, encontramos:

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = -80 \\ U_3 = 80 \\ V_1 = 0 \\ V_2 = 210 \\ V_3 = 210 \end{cases}$$

Agora iremos calcular os coeficientes para as variáveis não básicas, usando a fórmula a seguir:

$$C_{ij} - U_i - V_j = ?$$

Como temos os valores de C_{ij} , U_i e V_j , podemos encontrar os coeficientes:

$$\begin{cases} C_{11} - U_1 - V_1 = 50 - 0 - 0 = 50 \\ C_{13} - U_1 - V_3 = 220 - 0 - 210 = 10 \\ C_{21} - U_2 - V_1 = 90 - (-80) - 0 = 170 \\ C_{22} - U_2 - V_2 = 200 - (-80) - 210 = 70 \end{cases}$$

Todos os coeficientes apresentaram valores positivos. Isso significa que se qualquer uma dessas variáveis for acrescentada em uma

nova solução, o objetivo (quilometragem total) aumentará. Como queremos minimizar a quilometragem total, a entrada de uma dessas variáveis irá piorar a solução.

Como não existe uma forma de melhorar a solução, isso significa que encontramos a solução ótima.

Resumindo



Aprendemos nesta Unidade como resolver problemas de transporte. Estes podem ser resolvidos com o simplex, porém existe uma forma mais simples: o algoritmo de transporte.

A resolução do problema é dividida em duas partes: (1) encontrar uma solução inicial, e (2) encontrar a solução ótima a partir da solução inicial. Conhecemos dois métodos para encontrar uma solução inicial: o método do canto noroeste e o método de Vogel (ou método das penalidades).

Aprendemos como verificar se a solução encontrada é a solução ótima; se ainda não for a solução ótima, outra variável entrará na nova solução. O procedimento é repetido até encontrar a solução ótima. Também vimos o que deve ser feito se ocorrer uma situação de degenerescência.



Na próxima Unidade tomaremos conhecimento sobre um tipo particular do problema de transportes: o problema de atribuição. Agora fixe o conteúdo desta Unidade com as Atividades de aprendizagem a seguir.



Atividades de aprendizagem

Considere o seguinte problema de transporte:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Disponibilidade (t)
Origem 1	10	15	20	40
Origem 2	12	25	18	100
Origem 3	16	14	24	10
Demanda (t)	50	40	60	

1. Encontre a solução inicial usando o método do canto noroeste.
2. Encontre a solução inicial usando o método de Vogel.
3. Encontre a solução ótima, partindo da solução inicial obtida na questão 1.
4. Encontre a solução ótima, partindo da solução inicial obtida na questão 2.

6

UNIDADE

Problema de Atribuição



Ao final desta Unidade, você deverá ser capaz de aplicar o algoritmo de atribuição e identificar problemas dentro da organização que se caracterizam como problema de designação.

Problema de Atribuição

Caro estudante,

Na Unidade anterior estudamos o problema de transportes. Agora veremos o problema de atribuição, também chamado de problema de designação ou problema da distribuição biunívoca.

Estamos chegando ao final da disciplina onde você travou conhecimento com métodos de resolução de problemas que ajudarão muito o gerenciamento dentro das organizações empresariais.

Bons estudos!

O Problema de Atribuição é um caso especial do problema de transportes. É quando temos apenas uma unidade em cada origem e cada destino pode receber apenas uma unidade. Então deverá ser feita a atribuição de uma origem para um único destino.

Você lembra do exemplo que usamos na Unidade 1, o qual ilustramos com a Figura 1? Aquele é um problema de atribuição.

Embora primeiramente imaginemos apenas problemas de transportes, outros tipos de problemas podem ser resolvidos com o algoritmo de atribuição. Alocar equipes para projetos, vendedores para regiões de vendas, gerentes para filiais da empresa etc.

Como você pode ver é um tipo de problema bem comum, tanto na área administrativa como até mesmo na vida pessoal.

Algoritmo de Atribuição

O problema de atribuição pode ser resolvido com o algoritmo de transportes, mas ele é resolvido com mais facilidade usando um algoritmo mais simples: o algoritmo de atribuição.

Para que esse algoritmo seja utilizado é necessário que a matriz seja quadrada, com o número de linhas igual ao número de colunas. Ou seja, o número de origens deve ser igual ao número de destinos. Também é preciso que a função objetivo seja de minimização.

A seguir temos os passos do algoritmo de atribuição.

Passo 1

- a) Subtrair de cada linha o seu menor valor.
- b) Subtrair de cada coluna o seu menor valor.

Passo 2

Traçar o menor número de retas necessárias para cobrir todos os “0” da matriz.

Se o r (número de retas) for igual a n (ordem da matriz), já é possível obter a solução ótima. Ir para o passo 4.

Se o r (número de retas) for menor que n (ordem da matriz), ir para o passo 3.

Passo 3

Selecionar o menor valor não coberto.

Subtrair esse valor de cada valor não coberto.

Adicionar esse valor nas intersecções.

Retornar ao passo 2.

Passo 4

Para fazer a alocação, procura-se as linhas e colunas com apenas um zero.

Exemplo 3. Atribuição de Transportes

Vamos resolver o exemplo da Unidade 1 usando o algoritmo de atribuição?

Na Tabela 33 das Distâncias entre as origens e os destinos temos as três origens, os três destinos e as distâncias entre eles.

Tabela 33: Distâncias entre as origens e os destinos

		Destinos		
		Curitiba	Maceió	Goiânia
Origens	Fortaleza	3.541	1.075	2.482
	Salvador	2.385	632	1.643
	Vitória	1.300	1.684	1.428

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O objetivo é minimizar a quilometragem total.

Vamos aplicar o Passo 1 item (a): subtrair de cada linha o seu menor valor.

O menor valor de cada linha está realçado na tabela a seguir:

Tabela 34: Menor valor de cada linha

3.541	1.075	2.482
2.385	632	1.643
1.300	1.684	1.428

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada linha o seu menor valor, a tabela fica da forma a seguir:

Tabela 35: Passo 1 (a)

2.466	0	1.407
1.753	0	1.011
0	384	128

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos aplicar o Passo 1 item (b): subtrair de cada coluna o seu menor valor.

O menor valor de cada coluna está realçado na Tabela 36 a seguir:

Tabela 36: Menor valor de cada coluna

2.466	0	1.407
1.753	0	1.011
0	384	128

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada coluna o seu menor valor, a tabela fica da forma a seguir:

Tabela 37: Passo 1 (b)

2.466	0	1.279
1.753	0	883
0	384	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos aplicar o Passo 2 e traçar o menor número de retas necessárias para cobrir todos os “0” da matriz.

Tabela 38: Passo 2

2.466	0	1.279
1.753	0	883
0	384	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Foram necessárias apenas 2 retas para cobrir todos os “0”, então $r = 2$.

Temos uma matriz 3×3 . Logo $n = 3$.

Como $r < n$, então precisamos ir para o passo 3.

Verifique isso no algoritmo!

Dos valores não cobertos o menor valor é o número 883. Na Tabela 39, podemos ver esse valor ressaltado.

Tabela 39: Passo 3

2.466	0	1.279
1.753	0	883
0	384	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora iremos subtrair 883 de cada valor não coberto e somar 883 em cada intercessão de retas.

A nova tabela fica assim:

Tabela 40: Nova tabela

1.583	0	396
870	0	0
0	1.267	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Ao aplicar novamente o passo 2, descobrimos que $r = n$. Ou seja, já podemos ir para o passo 4 e encontrar a solução ótima.

Vamos priorizar as linhas e colunas com apenas um zero. Por exemplo, a linha 1 só tem um zero. Logo, vamos atribuir a origem 1 ao destino 2.

Tabela 41: Atribuição origem 1 ao destino 2

1.583	0	396
870	$\oplus$	0
0	1.267	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna 1 só tem um zero. Logo vamos atribuir a origem 3 ao destino 1.

Tabela 42: Atribuição origem 3 ao destino 1

1.583	0	396
870	$\oplus$	0
0	1.267	$\oplus$

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora basta atribuir a origem 2 ao destino 3.

Tabela 43: Atribuição origem 2 ao destino 3

1.583	0	396
870	$\oplus$	0
0	1.267	$\oplus$

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O que isso significa?

Significa que a solução ótima para esse problema de atribuição é a realização dos seguintes transportes:

- De Fortaleza para Maceió;
- De Salvador para Goiânia; e
- De Vitória para Curitiba.

Essa é a designação que proporciona a menor quilometragem total.

Exemplo 4. Designação de Equipes para Projetos

Vamos resolver outro problema de atribuição.

Suponha que um gerente precisa designar 4 equipes diferentes para 4 projetos. Na Tabela 14 a seguir podemos ver o tempo estimado que cada equipe precisa para realizar cada um dos projetos.

Tabela 44: Tempo estimado de realização de projetos por equipe

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	5 dias	7 dias	8 dias	8 dias
Equipe 2	9 dias	10 dias	5 dias	7 dias
Equipe 3	7 dias	8 dias	9 dias	8 dias
Equipe 4	8 dias	6 dias	9 dias	9 dias

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

O objetivo é minimizar o tempo total.

Vamos aplicar o Passo 1 item (a): subtrair de cada linha o seu menor valor.

O menor valor de cada linha está realçado na Tabela 45:

Tabela 45: O menor valor de cada linha

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	5 dias	7 dias	8 dias	8 dias
Equipe 2	9 dias	10 dias	5 dias	7 dias
Equipe 3	7 dias	8 dias	9 dias	8 dias
Equipe 4	8 dias	6 dias	9 dias	9 dias

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada linha o seu menor valor, a tabela fica da forma:

Tabela 46: Passo 1 (a)

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	3
Equipe 2	4	5	0	2
Equipe 3	0	1	2	1
Equipe 4	2	0	3	3

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos aplicar o Passo 1 item (b): subtrair de cada coluna o seu menor valor.

O menor valor de cada coluna está realçado na Tabela 47 a seguir:

Tabela 47: O menor valor de cada coluna

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	3
Equipe 2	4	5	0	2
Equipe 3	0	1	2	1
Equipe 4	2	0	3	3

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada coluna o seu menor valor, a tabela fica da forma a seguir:

Tabela 48: Passo 1 (b)

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	2
Equipe 2	4	5	0	1
Equipe 3	0	1	2	0
Equipe 4	2	0	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Aplicando o Passo 2 temos que $r = n$. Ou seja, já podemos ir para o passo 4 e encontrar a solução ótima.

Vamos priorizar as linhas e colunas com apenas um zero. Por exemplo, a linha 1 só tem um zero. Logo, vamos atribuir a equipe 1 ao projeto 1.

Tabela 49: Atribuição da equipe 1 ao projeto 1

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	2
Equipe 2	4	5	0	1
Equipe 3	0	1	2	0
Equipe 4	2	0	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A linha 2 também só tem um zero. Logo vamos atribuir a equipe 2 ao projeto 3.

Tabela 50: Atribuição da equipe 2 ao projeto 3

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	2
Equipe 2	4	5	0	1
Equipe 3	0	1	2	0
Equipe 4	2	0	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna 2 só tem um zero. Logo vamos atribuir a equipe 4 ao projeto 2.

Tabela 51: Atribuição da equipe 4 ao projeto 2

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	2
Equipe 2	4	5	0	1
Equipe 3	0	1	2	0
Equipe 4	2	0	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna 4 também só tem um zero. Logo vamos atribuir a equipe 3 ao projeto 4.

Tabela 52: Atribuição da equipe 3 ao projeto 4

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4
Equipe 1	0	2	3	2
Equipe 2	4	5	0	1
Equipe 3	0	1	2	0
Equipe 4	2	0	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A solução ótima para esse problema de atribuição é a realização das seguintes designações:

- Equipe 1 para o Projeto 1;
- Equipe 2 para o Projeto 3;
- Equipe 3 para o Projeto 4; e

- Equipe 4 para o Projeto 2.

Essa é a designação que resulta na menor duração total.

Casos Especiais do Problema de Atribuição

Quando estudamos os passos do algoritmo de atribuição, vimos que ele é aplicável para os casos em que a matriz seja quadrada e que a função objetivo seja de minimização.

Porém, nem sempre os nossos problemas têm essas características. No Exemplo 5 a seguir, vamos aprender como adaptar os problemas para podermos utilizar o algoritmo de atribuição.

Exemplo 5. Contratação de estagiários

Imagine uma empresa que precisa contratar três estagiários: um para o área de recursos humanos, um para a área de custos, e um para a área de marketing. No banco de dados dessa empresa existem quatro bons alunos que já passaram por outros processos seletivos e que não foram selecionados. Porém, como eram bons alunos a empresa os manteve no banco de dados para futuras contratações.

Na Tabela 53, podemos ver a nota acadêmica desses alunos em cada área.

Tabela 53: Nota de cada aluno por área de estágio ofertada

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	9	7	7	6
Custos	9	8	7	7
Marketing	0	6	7	8

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A empresa está adotando o princípio de que um aluno com maior nota em determinada área teria um rendimento maior do que os demais alunos. O objetivo seria encontrar a atribuição que resultaria na maior nota global.

Primeiramente, o número de origens não é igual ao número de destinos.

Como podemos resolver essa situação? Pense um pouco.

Podemos criar uma área fictícia. Assim, passaremos a ter uma matriz 4 x 4. Como é uma área que não existe, a nota dos alunos nessa área será zero. Veja como ficará a nossa Tabela 54 de Inserção de área de estágio fictícia:

Tabela 54: Inserção de área de estágio fictícia

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	9	7	7	6
Custos	9	8	7	7
Marketing	0	6	7	8
Fictícia	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Bem, agora temos outra dificuldade. A função objetivo é maximizar a nota global.

Como podemos resolver essa situação?

Basta transformar esse problema de maximização em um problema de minimização. Para isso vamos escolher a maior nota da tabela, que é nove.

Agora vamos encontrar diferença entre cada nota e a nota máxima. Assim a diferença será: diferença = $(9 - \text{nota})$.

Tabela 55: Transformação do problema de maximização em minimização

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	9	3	2	1
Fictícia	9	9	9	9

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora temos um problema de minimização. Se encontrarmos o valor que minimiza essas diferenças, encontraremos a atribuição que retornará à maior nota global.

Bem, vamos aplicar o algoritmo de atribuição.

Vamos aplicar o Passo 1 item (a): subtrair de cada linha o seu menor valor.

O menor valor de cada linha está realçado na Tabela 56 a seguir:

Tabela 56: Menor valor de cada linha

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	9	3	2	1
Fictícia	9	9	9	9

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada linha o seu menor valor, a tabela fica da forma a seguir:

Tabela 57: Passo 1 (a)

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	8	2	1	0
Fictícia	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos aplicar o Passo 1 item (b): subtrair de cada coluna o seu menor valor.

O menor valor de cada coluna está realçado na Tabela 58 a seguir:

Tabela 58: Menor valor de cada coluna

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	8	2	1	0
Fictícia	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Subtraindo de cada coluna o seu menor valor, a tabela fica da forma a seguir:

Tabela 59: Passo 1 (b)

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	8	2	1	0
Fictícia	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Vamos aplicar o Passo 2 e traçar o menor número de retas necessárias para cobrir todos os “0” da matriz.

Tabela 60: Passo 2

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	2	2	3
Custos	0	1	2	2
Marketing	8	2	1	0
Fictícia	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Foram necessárias apenas três retas para cobrir todos os “0”, então $r = 3$.

Temos uma matriz 4×4 . Logo, $n = 4$.

Como $r < n$, então precisamos ir para o passo 3.

Dos valores não cobertos o menor valor é o número 1.

Agora iremos subtrair 1 de cada valor não coberto e somar 1 em cada interseção de retas.

A nova tabela fica assim:

Tabela 61: Nova tabela

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	1	1	3
Custos	0	0	1	2
Marketing	8	1	0	0
Fictícia	1	0	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Ao aplicar novamente o passo 2, descobrimos que o $r = n$. Ou seja, já podemos ir para o passo 4 e encontrar a solução ótima.

Vamos priorizar as linhas e colunas com apenas um zero. Por exemplo, a linha 1 só tem um zero. Logo, vamos atribuir a área de Recursos Humanos ao aluno 1.

Tabela 62: Atribuição da Área de Recursos Humanos ao Aluno 1

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	1	1	3
Custos	0	0	1	2
Marketing	8	1	0	0
Fictícia	1	0	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A linha 2 tem dois zeros. Note que como o Aluno 1 foi atribuído para a área de Recursos Humanos, ele não será designado para a área de custos. Note que o zero correspondente a área de custos e o aluno 1 está riscado. Logo, sobra apenas um zero na linha 2. Assim, vamos atribuir a área de Custos para o Aluno 2.

Tabela 63: Atribuição da Área de Custos ao Aluno 2

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	1	1	3
Custos	0	0	1	2
Marketing	8	1	0	0
Fictícia	1	0	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A coluna 4 só tem um zero. Logo, vamos atribuir a área de Marketing ao aluno 4.

Tabela 64: Atribuição da Área de Marketing ao Aluno 4

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	1	1	3
Custos	0	0	1	2
Marketing	8	1	0	0
Fictícia	1	0	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Por fim, atribuímos a área fictícia ao Aluno 3.

Tabela 65: Atribuição da Área Fictícia ao Aluno 3

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
Recursos Humanos	0	1	1	3
Custos	$\ominus$	0	1	2
Marketing	8	1	$\ominus$	0
Fictícia	1	$\ominus$	0	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A solução ótima para esse problema de atribuição é a realização das seguintes designações:

- área de Recursos Humanos para o Aluno 1;
- área de Custos para o Aluno 2;
- área de Marketing para o Aluno 4; e
- área Fictícia para o Aluno 3.

Essa é a designação que resulta na menor diferença e na maior nota global.

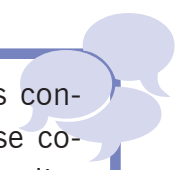
Note que a última alocação não existe na prática. Ela foi utilizada para podermos resolver o problema com o uso do algoritmo. Na prática, o aluno 3 não será contratado e seu currículo continuará no banco de dados para as próximas contratações.

Resumindo



Aprendemos nesta Unidade como resolver problemas de atribuição. Esse problema é um caso especial do problema de transportes, porém existe um algoritmo mais simples para resolver os problemas de atribuição: o algoritmo de atribuição. Para esse algoritmo ser aplicado é necessário que a quantidade de origens seja igual à quantidade de destinos e que a função objetivo seja de minimização.

Vimos também, que se o nosso problema não tiver essas características, podemos adaptar o problema com o acréscimo de origens ou destinos fictícios ou transformando o problema de maximização em um problema de minimização.



Nesta disciplina você aprendeu os principais conceitos e técnicas de programação linear. Esse conhecimento pode ser aplicado para obter resultados melhores tanto para você quando para a sua organização. Não deixe de fazer a verificação dos conhecimentos adquiridos nesta Unidade 6 com as Atividades de aprendizagem.



Atividades de aprendizagem

Resolva os seguintes problemas a seguir:

1. Resolva o problema de atribuição. O objetivo é minimizar o tempo gasto (em dias).

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3
Equipe 1	4 dias	9 dias	3 dias
Equipe 2	5 dias	6 dias	4 dias
Equipe 3	8 dias	11 dias	12 dias

2. Você tem três origens; que são Brasília, Rio de Janeiro e Manaus; e três destinos; que são Palmas, Porto Velho e Teresina; e precisa transportar um item de cada uma dessas origens para um desses destinos. O objetivo é minimizar a quilometragem total (em km). Na vida prática, nem sempre todas as informações são fornecidas. Para poder resolver esse problema, você deverá procurar (em livros, mapas, internet etc.) as distâncias entre essas cidades.
3. Resolva o problema de atribuição. O objetivo é minimizar o custo (em Reais).

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4
Origem 1	R\$ 10	R\$ 15	R\$ 20	R\$ 25
Origem 2	R\$ 20	R\$ 15	R\$ 10	R\$ 20
Origem 3	R\$ 30	R\$ 10	R\$ 15	R\$ 20
Origem 4	R\$ 40	R\$ 30	R\$ 20	R\$ 30

Referências



ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. *Introdução à Pesquisa Operacional: métodos e modelos para a análise de decisão*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

CORRAR, Luiz J.; THEOPHILO, Carlos Renato. *Pesquisa operacional para decisão em contabilidade e administração: contabilometria*. São Paulo: Atlas, 2004.

HOUAISS. Instituto Antônio Houaiss. *Houaiss eletrônico*. Versão monousuário 3.0. Produzido e distribuído por: Editora Objetiva Ltda., jun. 2009.

INVERTIA. Tudo o que você queria saber sobre a decisão do Copom. *Site Terra*, aba Economia, notícia publicada em 18 jun. 2003. Disponível em: <http://economia.terra.com.br/noticias/noticia.aspx?idNoticia=200306181600_INV_27195214>. Acesso em: 10 abr. 2012.

SHAMBLIN, J. E.; STEVENS, G. T. *Pesquisa operacional: uma abordagem básica*. São Paulo: Atlas, 1979.

STEINBRUCK, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: Makron Books, 1987.

LOESCH, Cláudio; HEIN, Nelson. *Pesquisa operacional: fundamentos e modelos*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

ROBERTO, Marcus. Pert CPM. *Administradores.com*: o portal da Administração, artigos, publicação em 18 ago. 2007. Disponível em: <<http://www.administradores.com.br/informe-se/artigos/pert-cpm/14392/>>. Acesso em: 10 abr. 2012.

SILVA, Ermes Medeiros da *et al.* *Pesquisa operacional*. São Paulo: Atlas, 1994.

Cesar Duarte Souto-Maior

Cesar Duarte Souto-Maior é formado em Engenharia de Controle e Automação Industrial pela UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) com Mestrado em Administração, também pela UFSC. Seu principal enfoque de pesquisa é a aplicação de métodos quantitativos na solução de problemas gerenciais. Atualmente é doutorando em Administração no CPGA/UFSC.

