Universidade Federal de Santa Catarina
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação
Departamento de Ensino de Graduação a Distância
Centro Socioeconômico
Departamento de Ciências da Administração

Matemática Financeira

Professores

Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja

2014
3ª edição

1ª edição – 2009.

2ª edição revisada e atualiazada – 2012.

G934m Guerra, Fernando

Matemática financeira / Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja. – 3. ed. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/ UFSC, 2014.

190p. : il.

Inclui bibliografia

Curso de Graduação em Administração a Distância

ISBN: 978-85-7988-150-3

1. Matemática financeira - Estudo e ensino. 2. Economia Matemática. 3. Educação a distância. I. Taneja, Inder Jeet. II. Título.

CDU: 65

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

REITORA – *Roselane Neckel*

VICE-REITORA – *Lúcia Helena Martins Pacheco*

PRÓ-REITOR DE GRADUAÇÃO – *Julian Borba*

COORDENADOR UAB – *Sônia Maria Silva Correa de Souza Cruz*

CENTRO SOCIOECONÔMICO

DIRETORA – *Elisete Dahmer Pfitscher*

VICE-DIRETOR – *Rolf Hermann Erdmann*

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA ADMINISTRAÇÃO

CHEFE DO DEPARTAMENTO – *Marcos Baptista Lopez Dalmau*

SUBCHEFE DO DEPARTAMENTO – *Eduardo Lobo*

COORDENADOR DE CURSO – *André Luís da Silva Leite*

SUBCOORDENADOR DE CURSO – *Rogério da Silva Nunes*

COMISSÃO EDITORIAL E DE REVISÃO – *Alessandra de Linhares Jacobsen*
Mauricio Roque Serva de Oliveira
Paulo Otolini Garrido
Claudelino Martins Dias Junior

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS – *Denise Aparecida Bunn*

SUPERVISÃO DE PRODUÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS – *Erika Alessandra Salmeron Silva*

DESIGN INSTRUCIONAL – *Denise Aparecida Bunn*
Maria Aparecida da Silva Alves
Patrícia Regina da Costa

PROJETO GRÁFICO – *Annye Cristiny Tessaro*

DIAGRAMAÇÃO – *Rita Castelan*
Annye Cristiny Tessaro

REVISÃO DE PORTUGUÊS – *Sérgio Meira*
Jaqueline Santos de Avila

ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO – *Fernando Guerra*
Inder Jeet Taneja

Apresentação

Olá, caro estudante do curso de Administração.

Seja bem-vindo!

Estamos iniciando a disciplina *Matemática Financeira*. Ela foi desenvolvida com o objetivo de tornar seus estudos práticos, e, para isso, disponibilizamos uma grande quantidade de exemplos e atividades.

Ao iniciar os estudos desta disciplina, algumas perguntas sobre ela devem passar por sua cabeça: Qual o seu campo de aplicação? Qual a sua utilidade prática? Ela fará alguma diferença em minha vida?

Bem, o campo de aplicação é bastante amplo, pois suas técnicas são necessárias em operações de financiamento de qualquer natureza: crédito a pessoas físicas e empresas, crédito direto ao consumidor, entre outras.

No mundo dos negócios, seu conhecimento é absolutamente imprescindível, uma vez que o custo dos financiamentos dado e recebido é peça central do sucesso empresarial.

Para facilitar seus estudos, este livro foi organizado em seis Unidades, com objetivos de apresentar alguns conceitos de Matemática Financeira e sua aplicação na resolução de problemas. Para isso, os assuntos abordados envolvem juros simples, descontos simples e compostos, rendas, sistemas de amortização, análise de investimentos, avaliação de projetos, tabela Price, financiamentos, correção monetária e inflação, assuntos os quais com certeza, você já ouviu falar e agora vai poder perceber a utilização desses conhecimentos no dia a dia de sua administração.

Durante seu estudo, em partes do livro você também vai encontrar alguns instrumentos para iniciá-lo na utilização da Calculadora Financeira HP-12C.

Esperamos que você tenha sucesso nesta disciplina. Nossos votos de bons estudos!

Professores Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja

Sumário

Unidade 3 – Rendas

Unidade 4 – Sistemas de Amortização de Empréstimo e Financiamento

Unidade 5 – Correção Monetária

Unidade 6 – Noções de Análise de Investimentos

1

UNIDADE

Juros: simples e compostos

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de elaborar e interpretar um fluxo de caixa, de aplicar os conceitos sobre a capitalização simples, de calcular juro simples e montante, de compreender a diferença entre os regimes de capitalizações e de calcular montante, taxas equivalentes, nominal e efetiva.

Fluxo de Caixa

Caro estudante!

Estamos iniciando a disciplina *Matemática Financeira*. Nela você encontrará conceitos dos quais já ouviu falar muitas vezes e agora terá a oportunidade de conhecê-los e ver a sua aplicação.

Esta primeira Unidade apresentará conceitos importantes para o transcorrer da disciplina.

Bons estudos e sucesso!

A operação de adição dos juros ao capital recebe o nome de capitalização simples. A capitalização simples ou regime de juros simples consiste em somar os juros ao capital ao final do prazo da operação financeira. Aqui, os juros são calculados sempre sobre o capital inicial e o montante será a soma do capital inicial com as parcelas de juros calculadas periodicamente, o que equivale a uma única capitalização. Inicialmente explicaremos o que é fluxo de caixa.

O fluxo de caixa tem por finalidade demonstrar, para certo horizonte de tempo, o comportamento esperado de uma organização.

A construção de um diagrama de fluxo de caixa (DFC) é muito simples. Traçamos uma reta horizontal, que representa o fator tempo. Em cada data constante dessa reta retratamos as entradas e as saídas de caixa correspondentes. Quando se tratar de entradas de caixa, a notação consiste em uma seta apontando para cima, enquanto que as saídas serão indicadas por setas apontando para baixo.

Exemplo 1.1. O banco da Eskina emprestou hoje, R$ 3.0000,00 à empresa Falida para receber R$ 3.100,00 um mês depois. Representar o DFC do banco e do cliente.

Resolução: Veja a Figura 1 a seguir.

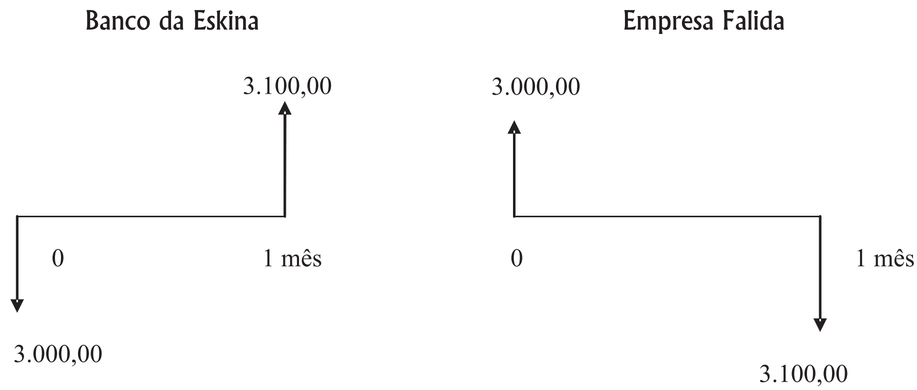

Figura 1: Fluxo de caixa
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

Exemplo 1.2. O preço à vista de um eletrodoméstico na loja Bemoreira é R$ 550,00; a prazo, a loja facilita o pagamento para o cliente em três meses com prestações iguais de R$ 188,86 para 30, 60 e 90 dias. Representar o DFC da loja Bemoreira e do cliente.

Resolução: Veja a Figura 2.

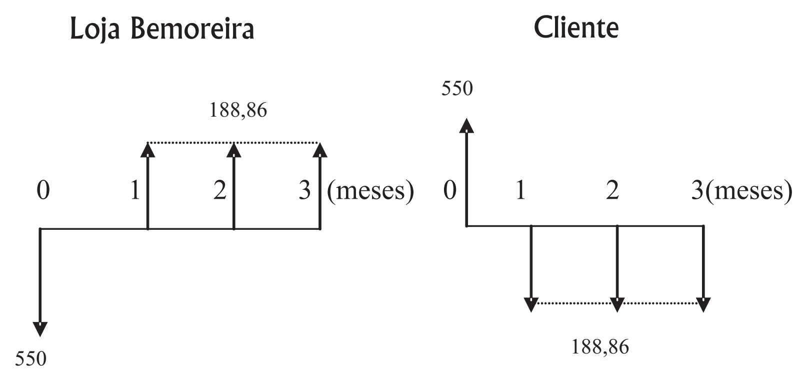

Figura 2: Fluxo de caixa
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

ou o Quadro 1.

Mês	0	1	2	3
Valor (R$)	(550,00)	188,86	188,86	188,86

Quadro 1: Fluxo de caixa
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Veja outro exemplo de fluxo de caixa no Quadro 2 a seguir.

Mês	0	6	8	10	12
Valor (R$)	3.000,00	(800,00)	550,00	(250,00)	3.500,00

Quadro 2: Fluxo de caixa
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Juros Simples: conceitos básicos

Apresentaremos alguns conceitos importantes para a realização de cálculos financeiros no dia a dia.

Juros (j)

Juros é o valor cobrado pelo detentor do dinheiro para cedê-lo àqueles que dele necessitem. Para o detentor é a remuneração paga pela cessão do dinheiro e para quem necessita dele é o custo pago pelo aluguel do dinheiro.

Cessão – ato ou efeito de ceder; empréstimo. Fonte: Houaiss (2001).

O dinheiro é uma mercadoria como diversas outras. Poderíamos considerar os bancos como uma empresa comercial cuja missão é transacionar o dinheiro. No ambiente bancário, tudo funciona como se estivéssemos em uma loja que trabalha com um único produto: o dinheiro.

Concluímos que o dinheiro possui um preço. Quem pede dinheiro emprestado deverá devolver ao banco a importância recebida, acrescida de uma quantia extra. Este acréscimo pode ser interpretado como sendo um "aluguel" a ser pago pela cessão temporária do dinheiro. Logo, esse aluguel, que, na prática constitui um preço do dinheiro, é denominado juros.

Capital (PV)

A posse do dinheiro propicia a possibilidade de cedê-lo mediante o pagamento de juros. O dinheiro disponível para tal operação recebe a denominação de capital. Portanto, podemos estabelecer a seguinte definição:

Capital é a importância ou dinheiro disponível para emprestarmos a quem dele necessite (ponto de visto do investidor), ou importância ou dinheiro de que necessitamos e de que não dispomos sendo, portanto, necessário obtê-lo por meio de um empréstimo (ponto de vista do tomador).

Período (n)

Ao dispor de um capital e sabendo que ele proporciona a possibilidade de incidência de juros, percebemos que a determinação do volume dos juros decorrente da operação está vinculada ao tempo disponível ou necessário para que o dinheiro permaneça aplicado ou emprestado.

É fácil deduzir que os fatores juros e tempo são diretamente proporcionais, ou seja, quanto maior o tempo em que o capital for cedido a terceiros, maior será o montante de juros resultante. Portanto, podemos estabelecer a seguinte definição:

O período é o intervalo de tempo em que o capital estará disponível para aplicação ou empréstimo, definindo o resultado da operação.

Montante (FV)

Tanto o investidor como os tomadores de empréstimo têm sempre uma preocupação: qual o valor resultante ao final do período.

Atribuímos ao valor final resultante da operação a denominação de “montante”. Logo, podemos estabelecer a seguinte definição:

Montante é o valor resultante, ao final do período, do empréstimo ou da aplicação financeira.

MONTANTE = CAPITAL + JUROS.

Taxa de Juros (i)

Todos os assuntos envolvendo matemática financeira devem trazer uma taxa de juros. Sem ela não seria possível desenvolver nenhum raciocínio ou chegar a uma solução. Sempre que nos referirmos a uma determinada taxa de juros deveremos associá-la a uma unidade de tempo. Exemplos: 9% ao ano; 0,75% ao mês; 5,5% ao trimestre.

A taxa de juros pode ser apresentada nas seguintes formas:

Taxa percentual – Exemplo: 15,75% ao ano;

Taxa unitária – Exemplo: 0,1575 ao ano.

A transformação da taxa percentual em taxa unitária é feita pela divisão da notação em percentagem por 100 e para a transformação inversa basta multiplicar taxa unitária por 100. Veja alguns exemplos a seguir.

Taxa Percentual	*Taxa Unitária*
$2{,}45\% = \frac{2{,}45}{100} = 0{,}0245$	*0,0245*
$28{,}64\% = \frac{28{,}64}{100} = 0{,}2864$	*0,2864*
$132{,}8\% = \frac{132{,}8}{100} = 1{,}328$	*1,328*
$0{,}045\% = \frac{0{,}045}{100} = 0{,}00045$	*0,00045*

Nas fórmulas, todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros. Nas fórmulas, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.

A taxa de juros é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) ao final de um período de tempo e o capital inicialmente empregado, isto é,

$$i = \frac{juros}{capital} = \frac{j}{PV}$$

Exemplo 1.3 Qual a taxa de juros cobrada num empréstimo de R$ 3.000,00, resgatado por R$ 3.450,00 ao final de um ano?

Resolução: Dados do problema:

Capital inicial = 3.000,00

Juros = 3.450,00 – 3.000,00 = 450,00

Logo,

$$i = \frac{450{,}00}{3.000{,}00} = 0{,}15 \text{ ou } 15\% \text{ ao ano.}$$

Esses são conceitos importantes e devem ser plenamente entendidos, pois serão aplicados nos próximos assuntos.
Por isso, se você ficou com alguma dúvida, volte e reveja esses conceitos. Se precisar de ajuda estamos à disposição.

Cálculo dos Juros Simples e do Montante

Cálculo do Juro Simples

O juro simples é caracterizado pelo fato de que apenas o valor principal, ou capital inicial, será remunerado ao longo do tempo de aplicação sendo diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O valor dos juros simples é obtido pela fórmula

$$j = PV \times i \times n$$

onde

j = valor dos juros
PV = principal, capital inicial ou valor presente
n = prazo
i = taxa

A partir de agora você, irá acompanhar a resolução de alguns exemplos. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre o cálculo do juro simples e potencialize seu entendimento para os desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1.4 Calcular o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 5.000,00 pelo prazo de 12 meses, à taxa de 1,5% ao mês.

Resolução: Dados do problema:

$PV = \text{R\$ } 5.000{,}00$

$n = 12$ meses

$i = 1{,}5\%\ am = 0{,}015\ am$

$j = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $j = PV \times i \times n$, você tem

$$j = 5.000{,}00 \times 0{,}015 \times 12 = 900{,}00.$$

Portanto, o valor dos juros correspondentes ao empréstimo é de R$ 900,00.

Exemplo 1.5 Calcular o valor de um empréstimo, à taxa de 24% ao ano, pelo prazo de 9 meses sendo pago de juros R$ 3.600,00.

Resolução: Dados do problema:

$n = 9$ meses

$j = \text{R\$ } 3.600{,}00$

$$i = 24\%\ aa = \frac{24\%\ aa}{12\ meses} = 2\%\ am = 0{,}02\ am$$

$PV = ?$

Da fórmula $j = PV \times i \times n$, vem $PV = \dfrac{j}{i \times n}$, logo

$$PV = \frac{3.600{,}00}{0{,}02 \times 9} = \frac{3.600{,}00}{0{,}18} = 20.000{,}00.$$

Portanto, o valor do empréstimo é R$ 20.000,00.

Exemplo 1.6 Uma aplicação de R$ 7.000,00, pelo prazo de 150 dias, obteve um rendimento de R$ 508,08. Qual a taxa anual de juros simples dessa aplicação?

Resolução: Dados do problema:

$PV = \text{R\$ } 7.000{,}00$

$n = 150 \text{ dias} = \dfrac{150}{360} \text{ ano}$

$j = \text{R\$ } 508{,}08$

i = ? (anual)

Da fórmula $j = PV \times i \times n$, vem $i = \dfrac{j}{Pv \times n}$, assim

$$i = \frac{j}{PV \times n} = \frac{508,08}{7.000,00 \times \frac{150}{360}} = \frac{508,08}{7.000,00 \times 0,4167} = \frac{508,08}{2.916,90} = 0,1742$$

ou,

$i = 0,1742 \times 100 = 17,42\%$.

Portanto, a taxa de juros desta aplicação é de 17,42% ao ano.

Exemplo 1.7 Sabendo-se que os juros de R$ 948,75 foram obtidos com a aplicação de R$ 5.500,00 à taxa de 1,15% ao mês, calcular o prazo da aplicação.

Resolução: Dados do problema:

PV = R$ 5.500,00

j = R$ 948,75

$i = 1,15\%\ am = \dfrac{1,15}{100} = 0,0115\ am$

n = ?

Pela fórmula $j = PV \times i \times n$, vem $n = \dfrac{j}{Pv \times i}$, substituindo os valores dados, você tem

$$n = \frac{j}{PV \times i} = \frac{948,75}{5.500,00 \times 0,0115} = \frac{948,75}{63,25} = 15.$$

Portanto, o prazo da aplicação é de 15 meses.

Cálculo do Montante ou do Valor Futuro

Sabemos que

$$FV = PV + j$$

então,

$$FV = PV + j = PV + PV \times i \times n = PV \times (1 + i \times n)$$

Portanto,

$$FV = PV \times (1 + i \times n).$$

Exemplo 1.8 Uma pessoa aplicou R$ 1.500,00 a uma taxa de juros simples de 1,1% ao mês, pelo prazo de 7 meses. Quanto resgatou?

Resolução: Dados do problema:

$PV =$ R$ 1.500,00

$n = 7$ meses

$i = 1{,}1\%\ am = \dfrac{1{,}1}{100} = 0{,}011\ am$

$FV = ?$

Aplicando a fórmula do montante $FV = PV \times (1 + i \times n)$, você tem

$$FV = 1.500{,}00 \times (1 + 0{,}011 \times 7)$$

$$= 1.500{,}00 \times (1 + 0{,}077)$$

$$= 1.500{,}00 \times 1{,}011 = 1.615{,}50.$$

Portanto, o valor do resgate é R$ 1.615,50.

Exemplo 1.9 A fábrica de Sorvetes "Bem Gelado" ampliou as suas instalações e solicitou um empréstimo ao Banco "República" no valor de R$ 450.000,00, valor já com os juros incorporados e com vencimento para seis anos. O gerente financeiro da Bem Gelado, estudou as taxas de alguns bancos e constatou que, caso desejasse aplicar usando juros simples,obteria uma taxa de 8% ao ano. Calcular o capital que a Bem Gelado precisaria aplicar hoje para dispor do montante necessário para quitar o empréstimo, por ocasião do seu vencimento.

Resolução: Dados do problema:

$FV =$ R$ 450.000,00

$n = 6$ anos

$i = 8\%\ aa = 0{,}08\ aa$

$PV = ?$

Da fórmula $FV = PV \times (1 + i \times n)$, vem $PV = \dfrac{FV}{1 + i \times n}$, logo

$$PV = \frac{450.000{,}00}{1 + 0{,}08 \times 6} = \frac{450.000{,}00}{1 + 0{,}48} = \frac{450.000{,}00}{1{,}48} = 304.054{,}05.$$

Portanto, o capital que a “Bem Gelado” precisaria aplicar hoje é R$ 304.054,05.

Exemplo 1.10 A loja Topa Tudo permite que os clientes possam efetuar o pagamento de suas compras com um determinado prazo. Sabendo-se que uma compra no valor de R$ 2.000,00, corresponde a um montante de R$ 2.350,00, para pagamento a prazo, determine o período oferecido, uma vez que a taxa de juros da loja é de 3,5% ao mês.

Resolução: Dados do problema:

$PV = \text{R\$ } 2.000{,}00$

$FV = \text{R\$ } 2.350{,}00$

$$i = 3{,}5\%\ am = \frac{3{,}5}{100} = 0{,}035\ am$$

$n = ?$

Pela fórmula $FV = PV \times (1 + i \times n)$, vem $n = \dfrac{FV - PV}{PV \times i}$, assim

$$n = \frac{2.350{,}00 - 2.000{,}00}{2.000 \times 0{,}035} = \frac{350{,}00}{70{,}00} = 5$$

Portanto, o prazo é de 5 meses.

Exemplo 1.11 O gerente financeiro da Indústria de Embalagens Papel Fino estuda a operação de desconto de duplicatas oferecidas pelo Banco Boa Praça. Ele dispõe R$ 519.600,00 em títulos. Caso realize a operação, o banco efetuará a retenção dos juros antecipadamente, e ele receberá, hoje, em valores líquidos, a importância de R$ 480.000,00. Sabendo-se que os títulos vencerão em 90 dias, determine a taxa de juros mensal que o banco cobra.

Resolução: Dados do problema:

$PV = \text{R\$ } 480.000{,}00$

$FV = \text{R\$ } 519.600{,}00$

n = 90 dias = 3 meses

i = ? (mensal)

Da fórmula $FV = PV \times (1 + i \times n)$, você tem $i = \dfrac{FV - PV}{PV \times n}$, assim

$$i = \frac{519.600,00 - 480.000,00}{480.000,00 \times 3} = \frac{39.600,00}{1.440.000,00} = 0,0275 = 2,75\%.$$

Portanto, a taxa de juros cobrada pelo banco Boa Praça é 2,75% ao mês.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui! Para isso, responda às atividades propostas a seguir, e caso tenha dúvidas faça uma releitura do texto e/ou procure seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Quanto obterei ao final de um ano, cinco meses e vinte e três dias, se aplicar um capital de R$ 1.200,00 a juros simples de 18% *aa*?
2. O capital de R$ 3.500,00 aplicado pelo período de 1 ano, 4 meses e 20 dias, formou um montante de R$ 3.950,00. Calcular a taxa de juros mensal.
3. Uma pessoa aplicou R$ 2.500,00, à taxa de 15% *aa*, gerando um montante de R$ 3.005,20. Calcular o prazo da aplicação.
4. Determinar o capital necessário para gerar um montante de R$ 7.950,00 ao final de 1 ano e 9 meses a uma taxa de 4,5% ao trimestre.
5. Certa pessoa empresta dinheiro a uma taxa de juros de 20% *aa*. Decorrido certo tempo, recebe juros equivalentes a $\frac{1}{4}$ do valor emprestado. Por quanto tempo (meses) esteve emprestado o dinheiro desta pessoa?
6. Uma pessoa colocou metade de seu capital a juros simples pelo prazo de 6 meses e o restante, nas mesmas condições, pelo período de 4 meses. Sabendo-se que, ao final das aplicações, os montantes eram de R$ 11.700,00 e R$ 10.800,00, respectivamente, determinar o capital aplicado.

7. Um investidor aplica $\frac{1}{4}$ de seu capital a 1,75% *am* e o restante a 18% ao semestre. Decorridos 2 anos, 5 meses e 19 dias, recebe um total de R$ 3.250,00 de juros. Calcular o seu capital.
8. Que quantia deve-se investir à taxa de 1,25% *am*, para que se tenha ao final de 9 meses e 23 dias um montante de R$ 2.317,37.
9. A loja Topa Tudo vende uma geladeira à vista por R$ 2.800,00 ou, então, a prazo com R$ 800,00 de entrada mais uma parcela de R$ 2.500,00 após cinco meses. Calcular a taxa mensal de juros simples do financiamento.

Juros Compostos

Na capitalização composta ou regime de **juros compostos** ao final de cada período os juros são capitalizados e o **montante** constituído passa a render juros no período seguinte, ou ainda, **capitalização composta** é aquela em que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, acrescido do juro acumulado até o período anterior. Diz-se que os juros são **capitalizados**, variando exponencialmente em função do tempo.

Portanto, o **montante** (*FV*), resultante de uma aplicação do **capital** (*PV*) a uma **taxa de juros compostos** *i* (por período de capitalização) durante *n* **períodos** de capitalização, é dado por

$$FV = PV\,(1 + i)^n$$

onde a taxa de juros *i* está expressa na forma unitária e o período de tempo *n* e a taxa de juros *i* devem estar na mesma unidade de tempo.

Os juros (*J*) obtidos no final de *n* períodos serão dados por

$$J = FV - PV$$

$$\Rightarrow J = PV\,(1 + i)^n - PV$$

$$\Rightarrow J = PV\,[(1 + i)^n - 1].$$

A partir de agora você, irá acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre o cálculo do montante, da taxa de juros, do valor presente e do prazo na capitalização composta e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1.12 Consideremos uma aplicação de R$ 15.000,00 a uma taxa de juros compostos de 8% *aa*, pelo prazo de 5 anos. Calcule o montante.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 15.000,00$

$i = 8\%\ aa = 0,08\ aa$

$n = 5$ anos

$FV = ?$

Aplicando a fórmula do montante, vem

$$FV = PV\,(1 + i)^n = 15.000,00\,(1 + 0,08)^5$$

$$\Rightarrow FV = 15.000,00\,(1,08)^5$$

$$\Rightarrow FV = 15.000,00 \times 1,4693 = 22.039,92.$$

Portanto, o montante da aplicação é R$ 22.039,92.

A calculadora HP12C determina diretamente o valor das quatro variáveis da fórmula $FV = PV\,(1+i)^n$, dado o valor das outras três. A calculadora HP12C opera usando a ideia de fluxo de caixa que você estudou e para isso utilizamos as suas funções financeiras (FV, PV, i, n), situadas na primeira linha da calculadora. Devemos limpar as memórias da mesma digitando as teclas *f REG*.

Para resolver o exemplo anterior, exemplo 1.12 na HP12C, digite:

f REG 15000 CHS PV 8 i 5 n FV aparecendo no visor 22.039,92.

Agora você irá acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso objetivo é que você compreenda a resolução dos exercícios sobre o cálculo de valor presente, taxa de juro, montante e período em juro composto e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 1.13 O Sr. Felisberto Silva, supervisor de serviços gerais da Comercial Topa Tudo, uma cadeia com 11 lojas, está analisando a aquisição de 11 máquinas de alta pressão, para lavagem de pisos. O fabricante do equipamento, que detém a preferência do sr. Felisberto, encaminhou-lhe um folheto técnico e um oferta comercial. Cada equipamento tem um custo estimado de R$ 1.800,00, perfazendo um total de R$ 19.800,00. O pagamento está estipulado em 180 dias da entrega das máquinas. O Sr. Felisberto quer saber qual seria o preço para pagamento contraentrega, considerando um custo financeiro de 2,5% ao mês.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 19.800,00$

$i = 2,5\%\ am = 0,025\ am$

$n = 180\ dias = 6\ meses$

$PV = ?$

Da fórmula $FV = PV\,(1 + i)^n$,vem $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$, assim

$$PV = \frac{19.800,00}{(1+0,025)^6} = \frac{19.800,00}{(1,025)^6} = \frac{19.800,00}{1,15969} = 17.073,48.$$

Portanto, o preço para pagamento contraentrega é R$ 17.073,48.

Para você resolver o exemplo anterior na HP12C, digite

f REG

19800 *CHS FV*

2.5 *i*

6 *n*

PV, aparecendo no visor 17.073,48.

Exemplo 1.14 A Companhia Seguradora Sempre Viva dispõe de um tipo de seguro de vida resgatável ao final de determinado período. Uma das modalidades consiste em efetuar um pagamento único no início, que será remunerado com base em uma taxa anual de 8,2%. Determine o tempo estimado para uma pessoa que efetua um pagamento de R$ 120.000,00 e terá direito a um resgate de R$ 495.760,50 ao final.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 495.760{,}50$

$PV = 120.000{,}00$

$i = 8{,}2\%\ aa = 0{,}082\ aa$

$n = ?$

Da fórmula $FV = PV\ (1 + i)^n$, vem $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{FV}{PV}\right)}{\ln\left(1+i\right)}$, assim

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{495.760{,}50}{120.000{,}00}\right)}{\ln\left(1+0{,}082\right)} = \frac{\ln\ (4{,}13134)}{\ln\ (1{,}082)} = \frac{1{,}41860}{0{,}07881} = 18.$$

Portanto, o tempo estimado é de 18 anos.

Para resolver o exemplo anterior na HP12C, você digita

$f\ \ REG$

$120000\ CHS\ \ PV$

$495760{,}50\ \ PV$

$8{,}2\ i$

n, aparecendo no visor 18.

Exemplo 1.15 Calcular a taxa mensal de juros compostos de uma aplicação de R$ 3.000,00 que produz um montante de R$ 3.168,67 ao final de 5 meses.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 3.0000$

$FV = 3.168{,}67$

n = 5 *meses*

i = ?

Da fórmula $FV = PV(1+i)^n$, vem $i = \left(\dfrac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$, assim

$$i = \left(\frac{3.168,67}{3.000,00}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = (1,05622)^{0,20} - 1 = 1,0110 - 1 = 0,0110,$$

ou,

i = 1,10% *am*.

Portanto, a taxa da aplicação é 1,10% *am*.

Para resolver o exemplo anterior na HP12C, digite

f REG

3000 *CHS PV*

3168.67 *FV*

5 *n*

i, aparecendo no visor 1,10.

Exemplo 1.16 Calcular o juro de um empréstimo de R$ 6.000,00 pelo prazo de 12 meses à taxa de juros compostos de 2,5% ao mês.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 6.0000$

n = 12 *meses*

i = 2,5% *am* = 0,025 *am*

J = ?

Aplicando diretamente a fórmula $J = PV\,[(1+i)^n - 1]$, vem

$$J = 6000,00\ [(1+0,025)^{12} - 1]$$

$$= 6.000,00\ [(1,025)^{12} - 1]$$

$$= 6.000,00\ [(1,3449 - 1]$$

$$= 6.000,00 \times 0,3449 = 2.069,33.$$

Portanto, o juro do empréstimo é de R$ 2.069,33.

Para resolver este exemplo na HP12C, você procede da seguinte maneira:

Digite *f* *REG*

2.5 *i*

12 *n*

6000 *CHS* *PV*

FV – 6000 e aparece no visor 2.069,33.

Em algumas operações financeiras, quando o prazo (ou período) não é um número inteiro em relação ao prazo definido para a taxa (período fracionário), usamos a convenção linear e a convenção exponencial para calcular o montante, taxa, juros, etc. É o que passaremos a estudar agora.

Convenção Linear

A convenção linear admite a formação de juros compostos para a parte inteira do período e de juros simples para a parte fracionária. O cálculo do montante FV na convenção linear é dado por

$$FV = PV \times (1+i)^n \times \left[1 + i\left(\frac{p}{q}\right)\right]$$

onde $\frac{p}{q}$ é a parte fracionária do período.

Exemplo 1.17 Pedro Paulo fez uma aplicação de R$ 23.500,00 por 2 anos e 9 meses, à taxa de 18% *aa*. Calcular o montante recebido pela convenção linear.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 23.500,00$

$i = 18\%\ aa = 0,18\ aa$

$n = 2$

$\frac{p}{q}$ (fração do ano) $= \frac{9}{12}$

$FV = ?$

Aplicando diretamente a fórmula

$$FV = PV \times (1+i)^n \times \left[1 + i\left(\frac{p}{q}\right)\right], \text{ vem}$$

$$FV = 23.500,00 \times (1+0,18)^2 \left[1 + 0,18 \times \frac{9}{12}\right]$$

$$= 23.500,00 \times (1,18)^2 \left[1 + 0,1350\right]$$

$$= 23.500,00 \times 1,3924 \times 1,1350$$

$$= 37.138,79.$$

Portanto, Pedro Paulo recebeu R$ 37.138,79.

Convenção Exponencial

A convenção exponencial adota o mesmo regime de capitalização para todo o período (tanto para a parte inteira como para a parte fracionária). O cálculo do montante na convenção exponencial é dado por

$$FV' = PV \times (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$$

onde $\frac{p}{q}$ é a parte fracionária do período.

Exemplo 1.18 Utilizando-se os dados do exemplo 1.17, calcular o montante pela convenção exponencial.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 23.500,00$

$i = 18\%\ aa = 0,18\ aa$

$n = 2$

$\frac{p}{q}$ (fração do ano) $= \frac{9}{12}$

$FV = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $FV' = PV \times (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$, você tem

$$FV' = 23.500,00 \times (1+0,18)^{2+\frac{9}{12}}$$
$$= 23.500,00 \times (1,18)^{2,75}$$
$$= 23.500,00 \times 1,5764$$
$$= 37.046,18.$$

Portanto, Pedro Paulo recebeu R$ 37.046,18 pela convenção exponencial.

Para resolver o exemplo 1.17, na HP12C, pela convenção linear, digite

f REG

23500 *CHS PV*

18 *i*

2 *ENTER* 9 *ENTER* 12 ÷ *n*

FV, aparecendo no visor 37.138,79

Para resolver o exemplo 1.18, na HP12C, pela convenção exponencial, com os dados que você já tem na calculadora, digite *STO EXX* e a seguir pressione duas vezes a tecla *FV* aparecendo no visor 37.046,18.

Observação 1.1 Existe uma diferença entre os montantes:

Pela convenção linear = R$ 37.138,79;

Pela convenção exponencial = R$ 37.046,18;

Diferença = R$ 92,61.

Isto se deve à formação de juros simples no prazo fracionário da convenção linear.

Para confirmar o seu entendimento sobre o que foi explicado até aqui, faça os exercícios que seguem. Se tiver dúvidas releia o texto e/ou procure seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Uma pessoa aplicou a uma taxa de juros de 1,25% *am* e recebeu R$ 1.850,00 de rendimentos de sua aplicação. Qual o montante que resgatou após 15 meses?
2. Certa loja vende um bem, à vista, por R$ 22.000,00. Caso o cliente opte por pagar em uma única parcela após certo período de tempo, a loja exige R$ 6.161,859 como juros. Calcular o prazo de financiamento, sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 2,5% *am*.
3. O capital de R$ 7.000,00 foi aplicado durante 116 dias, a uma taxa anual de 12%. Calcular o montante, pela convenção linear e convenção exponencial.
4. Uma pessoa investiu R$ 4.000,00 à taxa de 15% *aa* e após certo tempo recebeu o montante de R$ 7.850,24. Quanto tempo o capital ficou aplicado?
5. Quanto deve ser aplicado hoje para que se tenha R$ 2.450,00 de juros ao fim de 2 anos e 6 meses, se a taxa de aplicação for de 3% ao trimestre?
6. Determinar a taxa de juros mensal recebida por um investidor que aplica R$ 2.500,00 e resgata R$ 2.739,09 ao final de nove meses.
7. Um investidor aplicou R$ 8.000,00 em uma instituição financeira que paga 1,2% *am*. Após certo período de tempo, ele recebeu R$ 9.916,06, estando neste valor incluídos os juros creditados e o capital investido. Calcular o tempo que ficou aplicado o dinheiro.

Taxas Equivalentes

A partir deste momento vamos estudar um dos conceitos mais importantes da matemática financeira, de enorme aplicação no mercado financeiro nacional, que é o conceito de taxas equivalentes; e isto nos motiva a seguinte definição.

Definição

Dizemos que duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e durante o mesmo prazo de aplicação, produzirem **montantes iguais**.

Por exemplo, as taxas i_1 = 2,5% *am* e i_2 = 34,488882% *aa* são equivalentes, pois, se aplicadas ao mesmo capital de R$ 1.500,00 pelo prazo de dois anos, produzem montantes iguais.

De fato, calculando o montante para a primeira taxa você tem,

$$FV = PV(1+i)^n = 1.500{,}00 \times (1{,}025)^{24} = 1.500 \times 1{,}8087 = 2.713{,}05.$$

Para a segunda taxa, vem

$$FV = PV(1+i)^n = 1.500{,}00 \times (1{,}344882)^2 = 1.500 \times 1{,}8087 = 2.713{,}05.$$

O cálculo da taxa equivalente i_{eq} é dado pela fórmula

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

onde

i = taxa conhecida

nd = período da taxa desconhecida

nc = período da taxa conhecida.

Exemplo 1.19 Calcular a taxa anual equivalente a 2,5% *am*.

Resolução: Dados do problema:

$i = 2{,}5\%\ am = 0{,}025\ am$

nc = 1 mês

nd = 1ano = 12 meses

Aplicando a fórmula, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}025)^{\frac{12}{1}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}025)^{12} - 1 = (1{,}025)^{12} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}3449 \times 100 = 34{,}49\%.$$

Portanto, a taxa anual equivalente é 34,49%.

Exemplo 1.20 Calcular a taxa mensal equivalente a 48% *aa*.

Resolução: Dados do problema:

i = 48% aa = 0,48 aa

nc = 1 ano = 12 meses

nd = 1 mês

Aplicando a fórmula anterior, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$\Rightarrow \; i_{eq} = (1+0{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}0332 \times 100 = 3{,}32\%.$$

Portanto, a taxa equivalente mensal é 3,32%.

Exemplo 1.21 Determinar a taxa semestral equivalente a 4,5% *at*.

Resolução: Dados do problema:

i = 4,5% at = 0,045 at

nc = 1 trimestre

nd = 1 semestre = 2 trimestres

Aplicando a fórmula, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$\Rightarrow \; i_{eq} = (1+0{,}045)^{\frac{2}{1}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}045)^{2} - 1 = (1{,}045)^{2} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}0920 \times 100 = 9{,}20\%.$$

Portanto, a taxa equivalente semestral é 9,20%.

Exemplo 1.22 Determinar a taxa equivalente a 38% *aa* pelo prazo de 57 dias.

Resolução: Dados do problema:

$i = 38\%\ aa = 0{,}38\ aa$

$nc = 1$ ano $= 360$ dias

$nd = 57$ dias

Aplicando a fórmula, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}38)^{\frac{57}{360}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1{,}38)^{\frac{57}{360}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}0523 \times 100 = 5{,}23\%.$$

Portanto, a taxa equivalente pelo prazo de 57 dias é 5,23%, ou seja, 5,23% *ap* (ao período).

Exemplo 1.23 Determinar a taxa para 214 dias equivalente a 18% *as*.

Resolução: Dados do problema:

$i = 18\%\ as = 0{,}18\ as$

$nc = 1\ sem = 180\ dias$

$nd = 214\ dias$

Pela fórmula anterior, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0{,}18)^{\frac{214}{180}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1{,}18)^{\frac{214}{180}} - 1 = 1{,}2174 - 1 = 0{,}2174$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}2174 \times 100 = 21{,}74\%.$$

Portanto, a taxa equivalente pelo prazo de 214 dias é 21,74%, ou 21,74% *ap* (ao período).

Exemplo 1.24 Calcular a taxa trimestral equivalente a 34,75% em um ano e seis meses.

Resolução: Dados do problema:

i = 34,75% em um ano e seis meses = 6 trimestres

nc = 6 trimestres

nd = 1 trimestre

Usando a fórmula, vem

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0{,}3475)^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1{,}3475)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1{,}0509 - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = 0{,}0509 = 0{,}0509 \times 100 = 5{,}09\%.$$

Portanto, a taxa equivalente trimestral é 5,09%.

Exemplo 1.25 O Sr. Epaminondas aplicou R$ 4.500,00, à taxa de 23% *aa* pelo prazo de um ano e sete meses. Calcular o valor de resgate dessa aplicação.

Resolução: Dados do problema:

PV = 4.500,00

i = 23% *aa* = 0,23 *aa*

n = 1 ano e 7 meses = 19 meses

FV = ?

Aqui, vamos inicialmente calcular a taxa equivalente ao período da aplicação, ou seja,

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0{,}23)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\Rightarrow i_{eq} = (1{,}23)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0174 \times 100 = 1{,}74\%.$$

Assim,

i = 1,74% *am*

Agora, pela fórmula do montante, vem

$$FV = PV \times (1 + \mathrm{i})^{n}$$

$$= 4.500{,}00 \times (1 + 0{,}0174)^{19}$$

$$= 4.500,00 \times (1,0174)^{19}$$
$$= 4.500,00 \times 1,3879$$
$$= 6.245,55.$$

Ou ainda,

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$
$$= 4.500,00 \times (1 + 0,23)^{\frac{19}{12}}$$
$$= 4.500,00 \times (1,23)^{\frac{19}{12}}$$
$$= 4.500,00 \times 1,3879$$
$$= 6.245,55.$$

Portanto, o Sr. Epaminondas resgatou R$ 6.245,55.

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Para que uma taxa de juros seja considerada **Efetiva** é necessário que o período ao qual se refere coincida com o período de capitalização, caso contrário, a taxa será dita **Nominal**. A taxa nominal geralmente é fornecida em termos anuais e o período de capitalização pode ser diário, mensal, trimestral, semestral, bimestral, quadrimestral e anual.

Alguns exemplos de taxa nominal:

- 24% *aa* com capitalização trimestral;
- 36% *aa* com capitalização mensal;
- 9,5% *as* com capitalização trimestral;
- 4,5% *at* com capitalização mensal;
- 2% *am* com capitalização diária.

O cálculo da taxa efetiva i_f é obtido pela fórmula

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1,$$

onde,

i = taxa nominal de juros;

k = número de capitalizações para um período da taxa nominal.

Exemplo 1.26 Calcular a taxa efetiva anual equivalente a 24% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: Neste caso,

$i = 24\%\ aa = 0{,}24\ aa$

$k = 4$ e $i_f = ?$

Aplicando a fórmula, vem

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$
$$\Rightarrow\ i_f = \left(1 + \frac{0{,}24}{4}\right)^4 - 1$$
$$\Rightarrow\ i_f = (1{,}06)^4 - 1 = 0{,}2624 = 26{,}24\%.$$

Portanto, a taxa efetiva equivalente é 26,24% *aa*.

Exemplo 1.27 Determinar a taxa nominal com capitalização mensal, da qual resultou a taxa efetiva de 39,75% *aa*.

Resolução: Dados do problema:

$i_f = 39{,}75\%\ aa = 0{,}3975\ aa$

$k = 12$

$i = ?$

Pela fórmula, você tem

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$
$$\Rightarrow 0{,}3975 = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1$$
$$\Rightarrow 1{,}3975 = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$$
$$\Rightarrow (1{,}3975)^{\frac{1}{12}} = \left(\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}\right)^{\frac{1}{12}}$$
$$\Rightarrow 1{,}0283 = 1 + \frac{i}{12}$$
$$\Rightarrow 1{,}0283 - 1 = \frac{i}{12}$$
$$\Rightarrow 0{,}0283 = \frac{i}{12}$$
$$\Rightarrow i = 12 \times 0{,}0283 = 0{,}3394$$

Portanto, a taxa nominal é 33,94% *aa*.

Exemplo 1.28 Qual a taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral?

Resolução: Neste caso,

i = 25,75% *aa* = 0,2575 *aa*

k = 2 e i_m = ?

Aplicando a fórmula da taxa efetiva, vem

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

$$\Rightarrow i_f = \left(1 + \frac{0{,}2575}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}2741 = 27{,}41\%.$$

Ou seja, a taxa efetiva é 27,41% *aa*.

Agora, vamos calcular a taxa equivalente mensal. Aplicando a fórmula de taxa equivalente $i_{eq} = i_m = (1 + i\,)^{\frac{nd}{nc}} - 1$, você tem

$$i_m = (1 + i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

$$\Rightarrow i_m = (1 + 0{,}2740)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0204 = 2{,}04\%.$$

Portanto, a taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral é 2,04% .

Observação 1.2 A taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral pode ser calculada diretamente usando os seguintes cálculos:

$$i_m = \left(\left(1 + \frac{0{,}2575}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}1288)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}204 = 2{,}04\%.$$

Exemplo 1.29 Qual a taxa efetiva trimestral equivalente a 41,5% *aa* com capitalização mensal?

Resolução: Neste caso,

$i = 41{,}5\%\ aa = 0{,}415\ aa$

$k = 12$

$i_t = ?$

Aplicando o procedimento da observação 1.2, você tem

$$i_t = \left(\left(1+\frac{0{,}415}{12}\right)^{12}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}0346)^3 - 1 = 0{,}1074 = 10{,}74\%$$

ou ainda, você divide 41,5% *aa* por 12 meses obtendo 3,4583% *am*, agora você determina a taxa trimestral equivalente a taxa mensal anterior, logo

$$i_t = (1{,}0346)^3 - 1 = 0{,}1074 = 10{,}74\%.$$

Portanto, a taxa efetiva é 10,74% *at*.

Exemplo 1.30 Determinar o montante, ao final de dois anos, de um capital de R$ 5.500,00 aplicado a 21% *aa* capitalizados trimestralmente.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 5.500{,}00$

$i = 21\%\ aa = 0{,}21\ aa$

$k = 4$

$n = 2$

$FV = ?$

Inicialmente você calcula a taxa efetiva anual equivalente à taxa dada; aplicando a fórmula da taxa efetiva, vem

$$i_f = \left(1+\frac{0{,}21}{4}\right)^4 - 1.$$

O montante é dado por

$$FV = PV(1+i)^n = PV(1+i_f)^2$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00\left[1+\left(1+\frac{0,21}{4}\right)^4-1\right]^2$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00\left[\left(1+\frac{0,21}{4}\right)^4\right]^2$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00 \times (1,0525)^8$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00 \times 1,50583$$

$$\Rightarrow FV = 8.282,08.$$

Portanto, o montante é R$ 8.282,08.

Observação 1.3 Para calcular o montante, quando temos taxa nominal, devemos sempre utilizar a taxa efetiva equivalente; assim o montante será dado pela fórmula

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\times n}.$$

Para resolver o exemplo 1.30, você tem

$$FV = 5.500,00\left(1+\frac{0,21}{4}\right)^{4\times 2}$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00 \times (1,0525)^8$$

$$\Rightarrow FV = 5.500,00 \times 1,50583$$

$$\Rightarrow FV = 8.282,08.$$

Exemplo 1.31 Calcular o juro de uma aplicação de R$ 3.450,00 a 15,5% *aa* com capitalização mensal pelo prazo de 2 anos e 6 meses.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 3.450,00$

i = 15,5% *aa* = 0,155 *aa*

k = 12

n = 2,5 anos

$J = ?$

Aplicando a fórmula da taxa efetiva, você tem

$$i_f = \left(1 + \frac{0,155}{12}\right)^{12} - 1 \Rightarrow 1 + i_f = \left(1 + \frac{0,155}{12}\right)^{12}.$$

Agora, aplicando a fórmula do juro vem

$$J = PV \times \left[(1 + i_f)^n - 1\right]$$

$$\Rightarrow \; J = 3.450,00 \times \left[\left(1 + \frac{0,155}{12}\right)^{12 \times 2,5} - 1\right]$$

$$\Rightarrow J = 3.450,00 \times \left[(1,0129)^{30} - 1\right]$$

$$\Rightarrow J = 3.450,00 \times \left[1,46964 - 1\right]$$

$$\Rightarrow J = 3.450,00 \times 0,46964 = 1.620,26.$$

Portanto, o valor do juro da aplicação é R$ 1.620,26.

Observação 1.4. Para o cálculo do juro, pela observação 1.2, vem

$$J = PV\left[\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1\right].$$

Para resolver o exemplo 1.31, você tem

$$J = 3.450,00\left[\left(1 + \frac{0,155}{12}\right)^{12 \times 2,5} - 1\right]$$

$$\Rightarrow J = 3.450,00\left[(1,0129)^{30} - 1\right]$$

$$\Rightarrow J = 3.450,00 \times 0,4696 = 1.620,26.$$

Saiba mais...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte algumas das seguintes referências:

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática Financeira e Suas Aplicações*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

GUERRA, Fernando. *Matemática financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática financeira*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

Resumindo

Nesta Unidade você estudou a capitalização simples e o cálculo do juro e do montante de uma operação financeira no regime de capitalização simples.

Você aprendeu também a capitalização composta e o cálculo de montante, taxas equivalentes, taxa efetiva e taxa nominal de uma operação financeira no regime de capitalização composta.

É importante que você tenha entendido o conteúdo desta Unidade para seguir com seus estudos em *Matemática Financeira*, por isso faça as atividades que seguem com bastante atenção. Persistindo dúvidas: releia o texto e/ou entre em contato com seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Calcular a taxa para 36 dias, equivalente à taxa de 12% *at*.
2. Calcular a taxa para 48 dias, equivalente à taxa de 30% *aa*.
3. Qual a taxa bimestral equivalente à taxa de 18,5% *at*?
4. Qual a taxa efetiva mensal, equivalente à taxa de 28% *aa*, com capitalização trimestral?
5. Qual a taxa efetiva semestral, equivalente à taxa de 18% *aa*, com capitalização semestral?
6. Uma aplicação de R$ 6.400,00 é resgatada por R$ 7.125,00 no prazo de 90 dias. Calcular a taxa anual ganha na operação.
7. Uma empresa toma emprestado R$ 25.000,00 para pagamento ao final de 2 anos e 6 meses. Se o banco cobra uma taxa de juros de 18,5% *aa*, com capitalização trimestral, qual será o montante devolvido?
8. Uma instituição financeira diz cobrar em suas operações uma taxa de 90% *aa*, com capitalização bimestral. Nessas condições, determinar a taxa de juros efetiva anual que está sendo cobrada ao devedor.
9. Quanto devo aplicar hoje para obter um rendimento de R$ 2.400,00 após 7 meses, a uma taxa de 18% *aa*, com capitalização trimestral?

2
Unidade

Descontos: simples e compostos

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de identificar e diferenciar os tipos de descontos simples, bem como de calcular o valor atual, o valor nominal e a taxa efetiva do desconto comercial e do desconto racional; e ainda de relacionar os descontos compostos e de aprender a calcular o valor atual, o valor nominal e a taxa efetiva do desconto comercial, além de saber enunciar e empregar em problemas práticos a equivalência de capitais.

Descontos Simples

Caro estudante,

Você aprendeu conceitos importantes que lhe ajudarão na tomada de decisão em relação à melhor aplicação financeira a escolher. A partir desta Unidade, passaremos a estudar descontos simples e descontos compostos e equivalência de capitais. Continue concentrado e se precisar de ajuda, estamos à sua disposição.

Antes de iniciarmos os descontos simples veremos alguns conceitos, tais como:

- **Valor nominal de um título (*FV*):** é o valor do título na data de seu vencimento.
- **Valor Atual ou valor descontado de um título (*PV*):** É o valor que um título tem em uma data que antecede ao seu vencimento.
- **Desconto**: é a quantia a ser abatida do valor nominal de um título ou a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

Sabemos que $FV = PV \times (1 + i \times n)$, como PV é o valor presente ou valor atual e FV é o valor futuro ou valor nominal, temos a seguinte fórmula

$$FV = PV \times (1 + i \times n) \text{ ou } PV = \frac{FV}{1 + i \times n}.$$

Exemplo 2.1 Calcular o valor nominal de um título de R$ 10.000,00, assinado hoje, com vencimento daqui a 15 meses, se a taxa de juros for de 48% *aa*.

Resolução: Dados do problema:

PV = R$ 10.000,00

n = 15 meses

$i = 48\%\ aa = 4\%\ am = 0{,}04\ am$

FV = ?

Usando a fórmula do valor nominal, vem

$$FV = 10.000{,}00 \times (1 + 0{,}04 \times 15) = 10.000{,}00 \times 1{,}60 = 16.000{,}00.$$

Portanto, o valor nominal do título é R$ 16.000,00.

Exemplo 2.2 O valor nominal de um título é R$ 6.000,00. Qual seu valor atual quatro meses antes de seu vencimento, se a taxa de juros é 36% *aa*?

Resolução: Dados do problema:

FV = R$ 6.000,00

n = 4 meses

$i = 36\%\ aa = 3\%\ am = 0{,}03\ am$

PV = ?

Aplicando a fórmula $PV = \dfrac{FV}{1 + i \times n}$ você tem

$$PV = \frac{6.000{,}00}{1 + 0{,}03 \times 4} = \frac{6.000{,}00}{1{,}12} = 5.357{,}14$$

Portanto, o valor atual do título cinco meses antes de seu vencimento é R$ 5.357,14.

Desconto Simples Comercial ou Por Fora (DC)

Em muitas operações bancárias é empregado o desconto simples comercial (ou desconto por fora). Ele consiste, em negociar um título com uma instituição financeira, mediante uma redução no seu valor, visando antecipar o recebimento de parte dele.

O cálculo do desconto simples comercial é dado pela seguinte fórmula

$$DC = FV \times i \times n$$

onde

FV = valor do título na data de seu vencimento ou montante ou valor nominal (N)

i = taxa de desconto

n = período de antecipação do título.

O valor líquido recebido ou valor atual comercial (VC) é dado por $VC = FV - DC$ ou

$$VC = FV - DC = FV - FV \times i \times n = FV \times (1 - i \times n)$$

logo,

$$VC = FV \times (1 - i \times n).$$

Quando calculamos o desconto comercial de um título necessitamos conhecer a taxa efetivamente cobrada nesta operação de desconto e isto motiva a seguinte definição.

- **Taxa efetiva** (i_f). *É a taxa de juros que aplicada sobre o valor descontado comercial (VC), gera no período (n) considerado um montante (FV) igual ao valor nominal, isto é,*

$$FV = VC \times (1 - i_f \times n)$$

logo, temos

$$i_f = \frac{\frac{FV}{VC} - 1}{n}.$$

Para calcularmos a taxa efetiva numa operação de desconto comercial simples precisamos conhecer o valor nominal do título, o valor descontado ou o valor atual comercial e o período de antecipação do título.

Exemplo 2.3 O sr. Indeciso, Gerente Financeiro da Empresa Falida Ltda., precisa antecipar alguns recebimentos programados para o próximo mês, em razão de alguns compromissos não previstos. Ele está levando ao Banco Caridade, com o qual costuma trabalhar, duplicatas no valor de R$ 150.000,00. A taxa de desconto por fora do Banco Caridade é de 2,5% ao mês. Os títulos têm vencimento previsto para 45 dias a partir desta data. Calcular:

a) O valor do desconto e o valor que ele receberá líquido;

b) A taxa efetiva mensal da operação.

Resolução: Dados do problema:

FV = R$ 150.000,00

$i = 2{,}5\%\ am = 0{,}025\ am$

n = 45 dias = 45/30 = 1,5 meses

$DC = ?$

$VC = ?$ e $i_f = ?$ (mensal)

Para responder à letra a, vem

$DC = FV \times i \times n = 150.000{,}00 \times 0{,}025 \times 1{,}5 = 5.625{,}00$ e
$VC = FV - DC = 150.000{,}00 - 5.625{,}00 = 144.375{,}00$.

Agora, para responder à letra b, vem

$$i_f = \frac{\dfrac{FV}{VC} - 1}{n}$$

$$= \frac{\dfrac{150.000{,}00}{144.375{,}00} - 1}{1{,}5}$$

$$= \frac{1{,}03896 - 1}{1{,}5}$$

$$= \frac{0{,}03896}{1{,}5} = 0{,}02597$$

ou,

$$i_f = 2{,}597\%\ am.$$

Portanto, o valor do desconto é de R$ 5.625,00; o valor que o Sr. Indeciso receberá líquido é de R$ 144.375,00 e a taxa efetiva mensal da operação é de 2,597%.

Exemplo 2.4 A Indústria de Transportes Perna Longa Ltda. está com dificuldades de caixa. O Sr. Boa Gente, gerente financeiro da empresa, negocia uma operação de desconto de duplicatas com o Banco Bom de Bico. Ele dispõe de R$ 450.000,00 em duplicatas, com vencimento em 60 dias. Sabendo-se que o banco opera com uma taxa de desconto por fora de 3,5% ao mês, determine:

a) o capital que ele conseguirá levantar nessa operação de desconto;

b) a taxa efetiva mensal que incidiu no desconto.

Resolução: Dados do problema:

$FV = \text{R\$ } 450.000{,}00$

$i = 3{,}5\%\ am = 0{,}035\ am$

$n = 60 \text{ dias} = 2 \text{ meses}$

$VC = ?$ e $i_f = ?$ (mensal)

Inicialmente, vamos calcular o valor do desconto comercial, pela fórmula dada, temos

$$DC = FV \times i \times n = 450.000{,}00 \times 0{,}035 \times 2 = 31.500{,}00.$$

Assim, respondendo à letra a, vem

$$VC = FV - DC = 450.000{,}00 - 31.500{,}00 = 418.500{,}00.$$

Para responder à letra b, vem

$$i_f = \frac{\dfrac{FV}{VC} - 1}{n}$$

$$= \frac{\dfrac{450.000{,}00}{418.500{,}00} - 1}{2}$$

$$= \frac{1,07527 - 1}{2}$$

$$= \frac{0,07527}{2} = 0,03763$$

ou,

$$i_f = 3,763\% \ am.$$

Portanto, o Sr. Boa Gente conseguirá levantar nesta operação o valor de R$ 418.500,00, a uma taxa efetiva da operação é de 3,763% *am*.

Exemplo 2.5 Uma Nota Promissória, no valor de R$ 7.500,00 foi descontada 6 meses antes de seu vencimento (prazo de resgate). Sabendo que a taxa de desconto comercial é 2,75% *am*, calcular o valor do desconto, o valor atual e a taxa efetiva da operação (mensal).

Resolução: Dados do problema:

$FV = \text{R\$ } 7.500,00$

$n = 6$ meses

$i = 2,75\% \ am = 0,0275 \ am$

$DC = ?$

$VC = ?$

$i_f = ?$ (mensal)

Inicialmente vamos calcular o desconto comercial e o valor atual, assim

$$DC = FV \times i \times n = 7.500,00 \times 0,0275 \times 6 = 1.237,50 \text{ e}$$

$$VC = FV - DC = 7.500,00 - 1.237,50 = 6.262,50.$$

Agora, vamos calcular a taxa efetiva da operação, logo

$$i_f = \frac{\frac{FV}{VC} - 1}{n}$$

$$= \frac{\frac{7.500,00}{6.262,50} - 1}{6}$$

$$= \frac{1{,}1976 - 1}{6}$$

$$= \frac{0{,}0{,}1976}{6} = 0{,}0329$$

ou,

i_f = 3,29% *am*.

Portanto, o valor do desconto é R$ 1.237,50, o valor atual do titulo é R$ 6.262,50 e a taxa efetiva mensal da operação é 3,29%.

Exemplo 2.6 A empresa Esperança realiza uma operação de desconto comercial de duplicata no valor de R$ 35.000,00, no banco Confiança, com vencimento para 110 dias à taxa de desconto de 3,75% *am*. A alíquota do IOF é de 0,0041% ao dia sobre o valor nominal do título. Calcular:

a) o valor do desconto;

b) o valor do IOF;

c) o valor a ser creditado ao cliente;

d) a taxa efetiva (mensal) da operação.

Resolução: Dados do problema:

$FV = \text{R\$ } 35.000{,}00$

$n = 110 \text{ dias}$

$i = 3{,}75\% \; am = 0{,}0375 \; am$

alíquota do IOF = $0{,}0041\% \; ao \; dia = \frac{0{,}0041}{100} = 0{,}000041 \; ao \; dia$

Aplicando diretamente as fórmulas, vem

a) $DC = FV \times i \times n = 35.000{,}00 \times \frac{0{,}0375}{30} \times 110 = 4.812{,}50$;

b) IOF = 35.000,00 × 0,000041 × 110 = 157,85;

c) $VC = FV - DC - IOF$ = 35.000,00 – 4.812,50 – 157,85 = 30.029,65;

d) $i_f = \dfrac{\dfrac{FV}{VC} - 1}{n}$

$= \dfrac{\dfrac{35.000,00}{30.029,65} - 1}{110}$

$= \dfrac{1,16551 - 1}{110}$

$= \dfrac{0,16551}{110}$

$= 0,00150 \times 30 = 0,04514$

ou,

$i_f = 4,51\%$ *am*.

Portanto, o valor do desconto desta operação é R$ 4.812,50, o valor do IOF é R$ 157,85, o valor a ser creditado o cliente é de R$ 30.029,65 e a taxa efetiva mensal da operação é 4,51%.

Exemplo 2.7 Um título de valor nominal R$ 18.000,00 foi descontado cinco meses antes de seu vencimento no banco Boa Sorte que cobra 0,95% de taxa de serviço (*h*), calculada sobre o valor nominal do título e da taxa de desconto por fora de 48% *aa*. Calcular:

a) o valor do desconto;

b) o valor atual;

c) a taxa efetiva mensal da operação.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 18.000,00$

$i = 48\%\ aa = 4\%\ am = 0,04\ am$

$n = 5$ meses

$h = 0,95\% = 0,0095$

Aqui, temos a taxa de serviço cobrada pelo banco Boa Sorte e o desconto será acrescido de $FV \times h$, assim para responder à letra a, vem

$$
\begin{aligned}
DC &= FV \times i \times n + FV \times h \\
&= 18.000{,}00 \times 0{,}04 \times 5 + 18.000{,}00 \times 0{,}0095 \\
&= 3.600{,}00 + 171{,}00 = 3.771{,}00.
\end{aligned}
$$

Agora, para responder à letra b, temos

$$VC = FV - DC = 18.000{,}00 - 3.771{,}00 = 14.229{,}00$$

isto é,

$$VC = 19.312{,}50.$$

Para calcular a taxa efetiva da operação, vem

$$i_f = \frac{\frac{FV}{VC} - 1}{n} = \frac{\frac{18.000{,}00}{14.229{,}00} - 1}{5} = \frac{1{,}2650 - 1}{5} = \frac{0{,}2650}{5} = 0{,}0530$$

ou,

$$i_f = 5{,}30\%\ am.$$

Portanto, o valor do desconto é de R$ 3.771,00; o valor atual é de R$ 14.229,00 e a taxa efetiva mensal é 5,30% *am*.

Exemplo 2.8 O valor atual comercial de um título, descontado 9 meses antes de seu vencimento, é de R$ 10.550,45. Determinar a taxa efetiva (anual) da operação, se a taxa de desconto é de 36% *aa* e a taxa administrativa é de 1%.

Resolução: Dados do problema:

$VC = 10.550{,}45$

$i = 36\%\ aa = 0{,}36\%\ am = 0{,}03\ am$

n = 9 meses

$h = 1\% = 0{,}01$

$i_f = ?$ (anual)

Para calcular a taxa efetiva precisamos do valor nominal ou valor futuro do título.

Aplicamos a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} VC &= FC - DC \\ &= FV - (FV \times i \times n \times FV \times h) \\ &= FV \times [1 - (in + h)]. \end{aligned}$$

Assim

$$10.550,45 = FV \times \left[1 - \left(\frac{0,36}{12} \times 9 + 0,01\right)\right]$$

$$\Rightarrow 10.550,45 = FV \times \left[1 - (0,27 + 0,01)\right]$$

$$\Rightarrow 10.550,45 = FV \times [1 - 0,28]$$

$$\Rightarrow 10.550,45 = FV \times 0,72$$

logo,

$$FV = \frac{10.550,45}{0,72} = 14.653,40.$$

Portanto, o valor nominal do título é de R$ 14.653,40.

Agora, calculando a taxa efetiva anual da operação, você tem

$$\begin{aligned} i_f &= \frac{\frac{FV}{VC} - 1}{n} \\ &= \frac{\frac{14.653,40}{10.550,45} - 1}{9} \times 12 \\ &= \frac{1,3889 - 1}{9} \times 12 \\ &= \frac{0,3889}{9} \times 12 \\ &= 0,0432 \times 12 = 0,5185 \end{aligned}$$

ou seja,

$$i_f = 51,85\% \ am.$$

Portanto, a taxa efetiva anual da operação é 51,85%.

Observação 2.1 A taxa efetiva para o desconto comercial pode ser calculada também pela fórmula $i_f = \dfrac{i}{1 - i \times n}$, onde i é a taxa de desconto.

Exemplo 2.9 Sendo 3,5% *am* a taxa de desconto comercial e o prazo de desconto de sete meses, calcular a taxa efetiva anual desta operação.

Resolução: Dados de problema:

$i = 3{,}5\%\ am = 0{,}035\ am$

$n = 7$

$i_f = ?$

Pela fórmula apresentada, vem

$$i_f = \frac{i}{1 - i \times n}$$

$$\Rightarrow i_f = \frac{0{,}035}{1 - 0{,}035 \times 7} = \frac{0{,}035}{0{,}7550}$$

$$\Rightarrow i_f = 0{,}0464 \times 12 = 0{,}5563$$

$$\Rightarrow i_f = 55{,}63\%.$$

Portanto, a taxa efetiva anual é 55,63%.

Exemplo 2.10 A taxa de desconto comercial do banco Esperança é 37,85 *aa* e sua taxa de despesa administrativa é 1,25% sobre o valor nominal do título. Sendo o prazo de antecipação do título de 9 meses, calcular a taxa efetiva mensal desta operação.

Resolução: Dados do problema:

$i = 37{,}85\%\ aa = 0{,}3785\ aa$

$n = 9$ meses

$h = 1{,}25\%$

$i_f = ?$ *(mensal)*

Aqui, temos a taxa de despesa administrativa (h). Assim a fórmula $i_f = \frac{i}{1 - i \times n}$, passa para $i_f = \frac{i + h}{1 - (i + h) \times n}$. Calculando $i + h$, vem

$$i + h = \frac{37{,}85\%\ aa}{12\ meses} + \frac{1{,}25\%}{9\ meses}$$

$$= 3{,}154\%\ am + 0{,}139\%\ am = 3{,}293\%\ am.$$

logo,

$$i_f = \frac{i+h}{1-(i+h)\times n} = \frac{0{,}03293}{1-0{,}03293\times 9} = \frac{0{,}03293}{0{,}7036} = 0{,}0468$$

ou seja,

$i_f = 4{,}68\%\ am.$

Portanto, a taxa efetiva mensal desta operação é de 4,68%.

Você obteve conhecimentos de conceitos importantes. Caso você tenha dúvidas sobre algum deles, não siga adiante, retorne ao texto anterior e reveja esses temas buscando apreender seus significados.

Desconto Simples Racional ou por Dentro (*DR*)

O *desconto racional simples* é obtido pelo cálculo de juros simples sobre o valor atual (VR) ou valor descontado racional do compromisso saldado n períodos antes de seu vencimento, ou seja,

$$DR = VR \times i \times n.$$

Na prática o valor atual do título é sempre uma incógnita, sendo conhecidos o seu valor nominal ou valor futuro (VF), o prazo e a taxa de desconto (i). Pela fórmula

$$FV = V \times (1 + i \times n) \quad \text{ou} \quad V = VR = \frac{FV}{1 + i \times n}$$

temos

$$DR = \frac{FV \times i \times n}{1 + i \times n}.$$

Assim, o cálculo do valor atual racional (VR) é dado pela fórmula

$$VR = \frac{FV}{1 + i \times n}.$$

Exemplo 2.11 Uma pessoa pretende saldar um título de R$ 7.500,00, oito meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto racional de 2,5% *am*. Determinar:

a) o valor do desconto por dentro;

b) o valor descontado.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 7.500,00$

$n = 8$ meses

$i = 2,5\%$ *am* $= 0,025$ *am*

Para responder à letra a, vem

$$DR = \frac{FV \times i \times n}{1 + i \times n}$$

$$\Rightarrow DR = \frac{7.500,00 \times 0,025 \times 8}{1 + 0,025 \times 8}$$

$$\Rightarrow DR = \frac{1.500,00}{1+0,20} = \frac{1.500,00}{1,20} = 1.250,00.$$

Agora, para responder à letra b, você tem

$$VR = FV - DR$$

$$\Rightarrow VR = 7.500,00 - 1.250,00 = 6.250,00$$

$$\Rightarrow VR = 6.250,00$$

ou ainda pela fórmula

$$VR = \frac{FV}{1 + i \times n} = \frac{7.500,00}{1+0,025 \times 8} = \frac{7.500,00}{1+0,12} = \frac{7.500,00}{1,12} = 6.250,00.$$

Portanto, o valor do desconto por dentro é de R$ 1.250,00 e o valor descontado é de R$ 6.250,00.

Exemplo 2.12 O desconto racional de um título, vencendo 198 dias, é igual a R$ 2.782,31. Calcular o valor nominal se a taxa de desconto é 36% *aa*.

Resolução: Dados do problema:

$DR = 2.782{,}31$

$n = 198d$

$i = 36\% = 0{,}36\ aa$

$FV = ?$

Aplicando a fórmula $DR = \dfrac{FV \times i \times n}{1 + i \times n}$, vem

$$2.782{,}31 = \frac{FV \times \dfrac{0{,}36}{360} \times 198}{1 + \dfrac{0{,}36}{360} \times 198}$$

$$\Rightarrow\ 2.782{,}31 = \frac{FV \times 0{,}1980}{1 + 0{,}1980} = \frac{FV \times 0{,}1980}{1{,}1980}$$

$$\Rightarrow\ 2.782{,}31 = \frac{FV \times 0{,}1980}{1{,}1980}$$

$$\Rightarrow\ FV = \frac{2.782{,}31 \times 1{,}1980}{0{,}1980}$$

$$\Rightarrow\ FV = \frac{3.333{,}21}{0{,}1980} = 16.834{,}38.$$

Portanto, o valor nominal do título é de *FV* = R$ 16.834,38.

Exemplo 2.13 Um título de valor nominal R$ 10.500,00, com vencimento em nove meses foi comprado por R$ 8.750,00. Calcular a taxa de desconto racional (anual).

Resolução: Dados do problema:

$FV = 10.500{,}00$

$n = 9$ meses

$VR = 8.750{,}00$

$i = ?$ (anual)

Pela definição de desconto racional vem,

$$DR = FV - VR = 10.500{,}00 - 8.750{,}00 = 1.750{,}00$$

Aplicando a fórmula $DR = VR \times i \times n$, você tem

$$\begin{aligned}
&1.750{,}00 = 10.500{,}00 \times i \times \frac{9}{12} \\
&\Rightarrow 1.750{,}00 = 10.500{,}00 \times i \times 0{,}75 \\
&\Rightarrow 1.750{,}00 = 7.875{,}00 \times i \\
&\Rightarrow i = \frac{1.750{,}00}{7.875{,}00} = 0{,}2222
\end{aligned}$$

ou seja,

$i = 22{,}22\%$ *aa*.

Portanto, a taxa anual de desconto racional é $i = 22{,}22\%$ *aa*.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui! Para saber, faça as atividades propostas a seguir, e caso tenha dúvidas releia os conceitos ou resultados ainda não entendidos e/ou peça ajuda.

Atividades de aprendizagem

1. O valor atual comercial recebido de um título é de R$ 5.950,48. Considerando-se a taxa de desconto de 36% *aa* e o prazo de antecipação de 147 dias, calcular o desconto.
2. Um título de valor nominal de R$ 6.000,00 é descontado comercialmente seis meses antes de seu vencimento à taxa de 2,5% *am*. Calcular o valor do desconto, o valor liberado e a taxa efetiva mensal da operação.
3. Se o banco Boa Vida exigir 1,25% de taxa de serviço, calcular a taxa efetiva anual se a taxa de desconto for de 36,5% *aa* e o prazo de desconto for de três meses.

4. A empresa Minas Catarina descontou uma nota promissória de R$ 10.000,00 no banco Felicidade, 89 dias antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial de 3% *am*. Determinar:

   a) o desconto;

   b) o valor líquido recebido pela empresa Minas Catarina, sabendo-se que o banco Felicidade cobra uma taxa de serviço de 0,75% do valor da promissória, pago no dia em que a empresa a descontou; e

   c) a taxa efetiva mensal de juros desta operação.

5. Um banco cobra, em suas operações de desconto de duplicatas, uma taxa de desconto comercial de 3,5% *am*. Qual a taxa efetiva mensal de juros simples se o prazo de vencimento for de oito meses.

6. Calcular o valor nominal de um título resgatado 150 dias antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto de 28,5% *aa*, sabendo-se que a diferença entre os descontos por fora e por dentro é de R$ 940,00.

7. A empresa Roda Viva vai ao banco Viva Roda para descontar uma duplicata de R$12.000,00 com vencimento a 120 dias. Se a taxa de desconto for de 48% *aa* e a taxa de serviço de 1,2%, calcular o valor líquido recebido e a taxa efetiva anual paga pela empresa Roda Viva.

8. Um título de crédito, com valor nominal de R$ 20.000,00 e vencível daqui a três anos, sofreu um desconto comercial a uma taxa de 6% *aa*. Se tivesse sofrido um desconto racional de mesmo valor, calcular a nova taxa anual de desconto.

9. Uma empresa descontou uma duplicata de R$ 30.000,00, 82 dias antes do vencimento. Sabendo que ela recebeu um valor líquido de R$ 28.345,40, calcule a taxa de desconto comercial mensal da operação.

10. Um banco credita na conta de um cliente a quantia de R$ 9.740,35 proveniente do desconto de um título efetuado 98 dias antes de seu vencimento. Sendo de 3,5% *am* a taxa de desconto e de 1,25% a taxa administrativa cobrada pelo banco, determinar:

    a) o valor nominal deste título;

    b) o valor do desconto; e

    c) a taxa efetiva anual desta operação.

Descontos Compostos

Sabemos que $FV = PV\,(1 + i)^n$. Como PV é o valor presente ou valor atual (PV) e FV é o valor futuro ou valor nominal (FV), temos a seguinte fórmula

$$FV = PV \times (1 + i)^n \Rightarrow PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}.$$

Já sabemos que se a taxa dada é nominal precisamos calcular a efetiva equivalente aplicando a fórmula

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

assim,

$$FV = PV \times \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \times n}.$$

Exemplo 2.14 Por quanto devemos comprar hoje um título com vencimento daqui a 4 meses de valor nominal R$ 8.000,00, se a taxa de juros é de 1,25% *am*?

Resolução: Dados do problema:

$FV = 8.000{,}00$

$i = 1{,}25\%\ am = 0{,}0125\ am$

$n = 4$ meses

$PV = ?$

Aplicando a fórmula do valor, vem

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n} = \frac{8.000{,}00}{(1 + 0{,}0125)^4}$$
$$= \frac{8.000{,}00}{(1{,}0125)^4} = \frac{8.000{,}00}{1{,}05095} = 7.612{,}19.$$

Portanto, o valor atual do título é R$ 7.612,19.

Exemplo 2.15 Determinar o valor nominal de um título com vencimento daqui a 2 anos sabendo-se que seu valor atual é R$ 7.500,00 e a taxa é de 36% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: Dados do problema:

i = 36% *aa* = 0,36 *aa*

n = 2 anos

PV = 7.500,00

K = 4

FV = ?

Aplicando diretamente a fórmula $FV = PV \times \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k \times n}$, você tem

$$FV = 7.500{,}00 \times \left(1+\frac{0{,}36}{4}\right)^{4\times 2}$$
$$= 7.500{,}00 \times (1+0{,}09)^8$$
$$= 7.500{,}00 \times (1{,}09)^8$$
$$= 7.500{,}00 \times 1{,}99256 = 14.944{,}22.$$

Portanto, o valor nominal do título é R$ 14.944,22.

Desconto Racional ou Desconto Por Dentro (d_r)

É a diferença entre o valor nominal e o valor atual de um título descontado n períodos antes de seu vencimento, ou seja, $d_r = FV - PV_r$.

Sabemos que

$$FV = PV \times (1+i)^n \Rightarrow PV_r = PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

é a fórmula para calcular o **valor atual racional**.

Agora,

$$d_r = FV - PV_r = FV - \frac{FV}{(1+i)^n} = FV \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

logo, o **desconto racional composto** é dado por

$$d_r = FV \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Já sabemos que, se a taxa dada é nominal precisamos calcular a efetiva equivalente e o desconto racional composto é dado por

$$d_r = FV \times \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \times n}}\right].$$

Exemplo 2.16 Calcular o desconto por dentro de um título de valor nominal R\$ 8.500,00 descontado 5 meses antes de seu vencimento à taxa de 3,5% *am*.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 8.500,00$

$i = 3,5\%\ am = 0,035\ am$

$n = 5$ meses

$d_r = ?$

Aplicando a fórmula $d_r = FV \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$, você tem

$$\begin{aligned} d_r &= 8.500,00\left[1 - \frac{1}{(1+0,035)^5}\right] \\ &= 8.500,00\left[1 - \frac{1}{(1,035)^5}\right] \\ &= 8.500,00\left[1 - \frac{1}{1,18769}\right] \\ &= 8.500,00\left[1 - 0,84197\right] \\ &= 8.500,00 \times 0,15803 = 1.343,20. \end{aligned}$$

Agora, para calcular o valor atual racional, por definição, vem

$$V_r = FV - d_r = 8.500,00 - 1.343,22 = 7.156,78.$$

Portanto, o desconto por dentro do título é R$ 1.343,22 e o valor atual racional é R$ 7.156,78.

Exemplo 2.17 Calcular o desconto racional de um título de valor nominal R$ 7.500,00, resgatado dois anos antes de seu vencimento, à taxa de 25% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: Dados do problema:

$i = 25\% = 0,25\ aa$

$n = 2$ anos

$k = 4$

$FV = 7.500,00$

$d_r = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $d_r = FV \times \left[1 - \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^{k\times n}}\right]$, vem

$$d_r = 7.500,00\left[1 - \frac{1}{\left(1+\dfrac{0,25}{4}\right)^{4\times 2}}\right]$$

$$= 7.500,00\left[1 - \frac{1}{(1,0625)^8}\right]$$

$$= 7.500,00\left[1 - \frac{1}{1,62417}\right]$$

$$= 7.500,00\ [1 - 0,61570]$$

$$= 7.500,00 \times 0,38430 = 2.882,26.$$

Portanto, o valor do desconto racional é R$ 2.882,26.

Exemplo 2.18 Uma empresa obtém um empréstimo para ser liquidado ao final de 12 meses, em pagamento único de R$ 8.500,00 à taxa de desconto por dentro de 4,5% *am*. Decorridos exatamente 5 meses, a empresa resolve liquidar esse empréstimo. Calcular o valor líquido a ser pago pela empresa.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 8.500,00$

$i = 4,5\% = 0,045$ *am*

$n = 7$ meses

$PV_r = ?$

Aplicando a fórmula $PV_r = PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$, você tem

$$PV_r = \frac{8.500,00}{(1+0,045)^7} = \frac{8.500,00}{(1,045)^7} = \frac{8.500,00}{1,36086} = 6.246,04.$$

Portanto, o valor líquido a ser pago pela empresa é R$ 6.246,04.

Exemplo 2.19 O valor nominal de um título é R$ 6.500,00 e o desconto racional obtido pelo cliente foi de R$ 835,63. Determinar o prazo de antecipação se a taxa de desconto é 3,5% *am*.

Resolução: Dados do problema:

$i = 3,5\% = 0,35$ *am*

$FV = 6.500,00$

$d_r = 833,63$

$n = ?$

Sabemos que o valor atual é $V_r = FV - d_r = 6.500 - 835,63 = 5.664,37$, assim

$$PV_r = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow 5.664,37 = \frac{6.500,00}{(1,035)^n}$$

$$\Rightarrow (1,035)^n = \frac{6.500,00}{5.664,37} = 1,14752$$

$$\Rightarrow (1,035)^n = 1,14752$$

$$\Rightarrow \ln(1,035)^n = \ln(1,14752)$$

$$\Rightarrow n \times \ln(1,035) = \ln(1,14752)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(1,14752)}{\ln(1,035)} = \frac{0,13760}{0,03440} = 4.$$

Portanto, o prazo de antecipação do título é 4 meses.

Desconto Comercial ou Desconto Por Fora (d_c)

O valor atual comercial ou o **valor descontado comercial** (PV_C) é dado pela fórmula

$$PV_C = FV \times (1 - i)^n$$

assim,

$$d_C = FV - PV_C = FV - FV \times (1 - i)^n = FV \times [1 - (1 - i)^n]$$

logo, o **desconto comercial ou desconto por fora composto** é dado por

$$d_C = FV \times [1 - (1 - i)^n].$$

Exemplo 2.20 Certo cliente descontou um título de valor nominal R$ 9.500,00, oito meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto comercial de 2,5% *am*, calcular o valor do desconto por fora e o valor recebido pelo cliente.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 9.500,00$

$n = 8$ meses

$i = 2,5\%\ am = 0,025\ am$

$d_c = ?$ e $PV_c = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $d_C = FV \times [1 - (1 - i)^n]$, você tem

$$d_C = 9.500,00\ [1 - (1 - 0,025)^8]$$
$$= 9.500,00\ [1 - (1 - 0,975)^8]$$
$$= 9.500,00\ [1 - (0,81665]$$
$$= 9.500,00 \times 0,18335 = 1.741,81.$$

Agora,

$$PV_C = FV - d_C = 9.500,00 - 1.741,81 = 7.758,19.$$

Portanto, o valor do desconto por fora é R$ 1.741,81 e o valor recebido pelo cliente é R$ 7.758,19.

Exemplo 2.21 Um título de valor nominal R$ 6.500,00 foi descontado oito meses antes de seu vencimento e o valor líquido recebido pelo seu portador foi no valor de R$ 4.980,00. Calcular a taxa mensal de desconto comercial.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 6.500{,}00$

$PV_C = 4.980{,}00$

$n = 8$ e $i = ?$

Aplicando a fórmula $PV_c = FV \times (1 - i)^n$, vem

$$4.980{,}00 = 6.500{,}00(1-i)^8$$

$$\Rightarrow (1-i)^8 = \frac{4.980{,}00}{6.500{,}00} = 0{,}76615$$

$$\Rightarrow (1-i)^8 = 0{,}76615$$

$$\Rightarrow \left((1-i)^8\right)^{\frac{1}{8}} = (0{,}76615)^{\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow 1-i = 0{,}96725$$

$$\Rightarrow i = 1 - 0{,}96725 = 0{,}03275 = 3{,}275\%.$$

Portanto, a taxa de desconto comercial é 3,275% *am*.

Exemplo 2.22 Certo título de valor nominal R$ 3.500,00 foi descontado antes de seu vencimento por R$ 2.879,3557 a taxa de desconto comercial de 2,75% *am*. Determine o prazo de antecipação.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 3.500{,}00$

$PV_c = 2.879{,}3557$

$i = 2{,}75\% = 0{,}0275$ *am*

$n = ?$

Aplicando a fórmula $PV_C = FV \times (1 - i)^n$, você tem

$$2.879{,}3557 = 3.500{,}00\,(1 - 0{,}0275)^n$$

$$\Rightarrow (0{,}9725) \;= \frac{2.879{,}3557}{3.500{,}00} = 0{,}82267$$

UNIDADE 2

$$\Rightarrow \ln(0{,}9725)^n = \ln(0{,}82267)$$

$$\Rightarrow n \times \ln(0{,}9725) = \ln(0{,}82267)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(0{,}82267)}{\ln(0{,}9725)} = \frac{-0{,}19520}{-0{,}02789} = 7.$$

Portanto, o prazo de antecipação é 7 meses.

Taxa Efetiva (i_f)

A taxa efetiva cobrada na operação de desconto comercial composto depende apenas da taxa de desconto (i) utilizada, que é dada pela fórmula

$$i_f = \frac{i}{1-i}.$$

Exemplo 2.23 A taxa de desconto comercial composto utilizada pelo banco Alvorada é de 24,75% *aa*. Calcular a taxa efetiva anual utilizada pelo banco Alvorada.

Resolução: Dados do problema:

i = 24,75% = 0,2475 *aa*

i_f = ?

Aplicando a fórmula, vem

$$i_f = \frac{i}{1-i} = \frac{0{,}2475}{1-0{,}2475} = 0{,}3289 = 32{,}89\%.$$

Portanto, a taxa efetiva do banco Alvorada é 32,89% *aa*.

Exemplo 2.24 A taxa efetiva utilizada para descontar comercialmente um título é 34,55% *aa*. Determinar a taxa de desconto comercial anual.

Resolução: Aqui, $i_f = 34{,}55\% = 0{,}3455$ *aa* e queremos calcular a taxa de desconto comercial anual. Aplicando a fórmula $i_f = \frac{i}{1-i}$, vem

$$0,3455 = \frac{i}{1-i}$$

$$\Rightarrow 0,3455\left(1-i\right)=i$$

$$\Rightarrow 0,3455 - 0,3455i = i$$

$$\Rightarrow 0,3455 = 0,3455i + i = 1,355i$$

$$\Rightarrow 0,3455 = 0,3455i$$

$$\Rightarrow i = \frac{0,3455}{1,3455} = 0,2567 = 25,67\%.$$

Portanto, a taxa de desconto comercial é 25,67% *aa*.

Exemplo 2.25 Um título foi descontado à taxa de 4,5% *am* sete meses antes de seu vencimento. O desconto comercial composto é R$ 4.780,98. Calcular o valor nominal do título, o valor atual e a taxa efetiva mensal.

Resolução: Dados do problema:

$d_c = 4.780,98$

$n = 7$ meses

$\mathrm{i} = 4,5\% = 0,045\ am$

$FV = ?$

$PV_c = ?$

$i_f = ?$

Aplicando a fórmula $d_C = FV \times [1 - (1 - i)^n]$, você calcula o valor nominal do título. Assim,

$$4.780,98 = N\left[1-\left(1-0,045\right)^7\right]$$

$$\Rightarrow FV = \frac{4.780,98}{1-\left(1-0,045\right)^7} = \frac{4.780,98}{1-\left(0,955\right)^7}$$

$$\Rightarrow FV = \frac{4.780,98}{1-0,72448} = \frac{4.780,98}{0,27552} = 17.352,28.$$

Agora,

$$V_c = FV - d_c = 17.352,28 - 4.780,98 = 12.571,30$$

e

$$i_f = \frac{0{,}045}{1 - 0{,}045} = 0{,}0471 = 4{,}71\% \; am.$$

Portanto, o valor nominal do título é R$ 17.352,28, o valor atual do título é R$ 12.571,30 e a taxa efetiva mensal é 4,71%.

Para melhor compreensão do conteúdo até aqui visto tente resolver as atividades a seguir, em caso de dúvida releia o material e/ou consulte seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Calcular o valor atual de um título de valor nominal igual a R$ 7.500,00, com 150 dias a vencer, sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 5,75% *am*.
2. Sabendo-se que o valor líquido creditado na conta de um cliente foi de R$ 5.490,00, correspondente ao desconto racional de um título de R$ 9.000,00 à taxa de 24% *aa*, determinar o prazo a decorrer até o vencimento desse título.
3. Calcular o desconto racional concedido a um título de valor de resgate igual a R$ 4.000,00, sabendo-se que faltam 120 dias para o seu vencimento e que a taxa de desconto é de 18% *aa*. Determine também o valor atual desse título.
4. Numa operação de desconto comercial de um título, o valor creditado na conta do cliente foi de R$ 13.980,00, sendo que o seu valor no na data de vencimento seria de R$ 15.850,00. Considerando-se que o prazo de antecipação foi de 9 meses, calcular a taxa anual de desconto e a taxa efetiva anual.
5. Calcular o valor do desconto comercial, o valor liberado e a taxa efetiva anual, aplicadas no desconto de uma duplicata com valor de resgate de R$ 15.000,00, prazo de 75 dias e uma taxa de desconto de 28% *aa*.

6. Uma pessoa propõe-se a pagar R$ 4.950,00 ao portador de uma nota promissória com vencimento daqui a 4 meses. Sabendo-se que o negócio está sendo realizado a uma taxa de desconto racional de 20% *aa*, qual o valor de emissão da nota promissória?
7. O portador de uma nota promissória com valor nominal de R$ 4.250,00 resgatou-a a uma taxa de desconto racional de 2% *am*, tendo um desconto de R$ 245,13. Esta operação foi realizada a quantos dias do vencimento do título?
8. Uma empresa deve R$ 70.000,00 a um banco cujo vencimento se dará daqui a 15 meses. No entanto, 8 meses antes do vencimento da dívida resolve quitar antecipadamente o empréstimo e solicita ao banco um desconto. Se o banco opera com o desconto composto "por fora" e a sua taxa de desconto para esse tipo de operação é 5,9% *am*, calcular o valor líquido que a empresa deve pagar ao banco quando da liquidação antecipada do empréstimo. Qual será a taxa mensal de desconto racional equivalente (taxa efetiva) para este mesmo período?
9. Se o valor nominal de um título for igual a 15 vezes seu desconto racional resultante de um resgate 7 meses antes do vencimento, calcular a taxa anual de desconto.

Equivalência de Capitais

O conceito de equivalência de capitais permite transformar formas de pagamentos (ou recebimentos) em outras equivalentes e isso ocorre quando queremos substituir um título ou um outro título por vários. Podemos também ter vários títulos com vencimentos em datas diferentes as quais queremos substituir por um único título. Isto nos mostra as seguintes definições.

- **Data focal ou data de referência**. É a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a diferentes datas.
- **Equação de Valor**. É a equação que permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, em uma mesma data focal.

- **Capitais Equivalentes**. Dois ou mais capitais nominais, supostos com datas de vencimento determinadas, dizem-se equivalentes quando, descontados para uma mesma data focal, à mesma taxa de juros e em idênticas condições, produzirem valores iguais.

Observação 2.2 Na equivalência de capitais vamos trabalhar sob o critério do desconto racional composto. Utilizaremos as seguintes fórmulas:

No processo de capitalização de título

$$FV = PV_r \times (1 + i)^n.$$

No processo de descapitalização de título

$$PV_r = \frac{FV}{(1 + i)^n}.$$

Quando trabalhamos com taxa nominal empregamos a fórmula

$$FV = PV_r \times \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \times n}.$$

Observação 2.3. Dois ou mais capitais, equivalentes sob o critério do desconto racional composto em certa data focal, são equivalentes em qualquer data focal.

Para uma melhor compreensão de equivalência de capitais, apresentamos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.26 Três títulos, um para doze meses no valor de R$ 8.000,00, outro para quinze meses no valor de R$ 12.000,00 e outro para vinte e quatro meses no valor de R$ 15.000,00, foram substituídos por dois outros, sendo o primeiro de R$ 10.000,00 para nove meses e o segundo para um ano e meio. Sabendo-se que a taxa de desconto racional adotada é de 4,5% *am*, qual será o valor do título para um ano e meio? (escolher data focal 18).

Resolução: Para data focal 18 veja a Figura 3 a seguir.

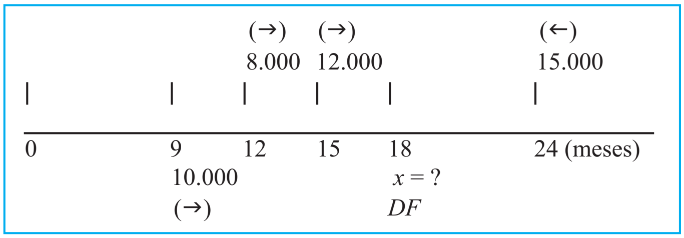

Figura 3: Problema sobre equivalência de capitais
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

Temos a seguinte equação de valor, comparando todos os capitais na data focal 18 meses e seja x o valor do título na data 18

$$8.000{,}00 \times (1{,}045)^6 + 12.000{,}00 \times (1{,}045)^3 + \frac{15.000{,}00}{(1{,}045)^6}$$
$$= 10.000{,}00 \times (1{,}045)^9 + x$$

$$\Rightarrow 8.000{,}00 \quad 1{,}30226 + 12.000{,}00 \times 1{,}14117 \quad + \frac{15.000{,}00}{1{,}30226}$$
$$= 10.000{,}00 \times 1{,}486095 + x$$

$$\Rightarrow 10.418{,}08 + 13.693{,}33 + 11.518{,}44 = 14.860{,}95 + x$$

$$\Rightarrow 35.630{,}51 = 14.860{,}95 + x$$

$$\Rightarrow x = 35.630{,}51 - 14.860{,}95 = 20.769{,}56.$$

Logo, o valor do título para 18 meses é R$ 20.769,56.

Portanto, os capitais de R$ 8.000,00 para 12 meses, R$ 12.000,00 para 15 meses e R$ 15.000,00 para 24 meses são equivalentes aos capitais R$ 10.000,00 para 9 meses e R$ 20.769,56 para 18 meses, à taxa de 4,5% *am*, pelo critério do desconto racional, em qualquer data focal escolhida.

Escolhendo a data focal 12 meses, você tem a seguinte equação de valor

$$8.000{,}00 + \frac{12.000{,}00}{(1{,}045)^3} + \frac{15.000{,}00}{(1{,}045)^{12}}$$
$$= 10.000{,}00 \times (1{,}045)^3 + \frac{x}{(1{,}045)^6}.$$

Simplificando, a equação anterior, você obtém $x = 20.769{,}56$.

Agora, se você escolher a data focal 0, tem a equação de valor a seguir

$$\frac{8.000{,}00}{(1{,}045)^{12}} + \frac{12.000{,}00}{(1{,}045)^{15}} + \frac{15.000{,}00}{(1{,}045)^{24}}$$
$$= \frac{10.000{,}00}{(1{,}045)^{9}} + \frac{x}{(1{,}045)^{18}}.$$

Simplificando, você obtém $x = 20.769{,}56$.

Exemplo 2.27 A empresa Salutar, devedora de um título no valor de R$ 45.000,00 para 4 anos, deseja resgatar, essa dívida em 3 pagamentos anuais iguais: o primeiro ao final de um ano, o segundo ao final de 3 anos e o último pagamento ao final de 4 anos. Se a taxa de juros da operação é de 36,5% *aa* com capitalização trimestral, calcular o valor desses pagamentos.

Resolução: Aqui $k = 4$, $i = 36{,}5\% = 0{,}365$ *aa*, veja a Figura 4 a seguir.

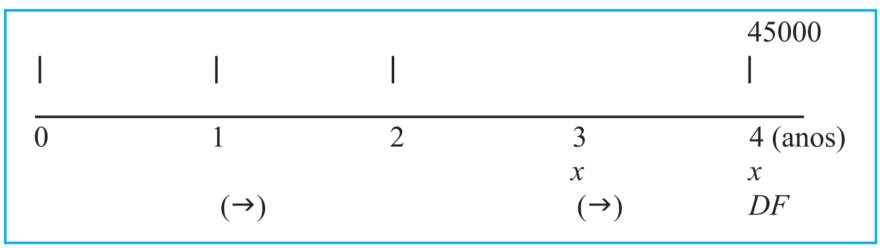

Figura 4: Problema sobre equivalência de capitais
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

Consideranda data focal 4 anos, você tem a seguinte equação de valor

$$45.000{,}00 = x\left(1+\frac{0{,}365}{4}\right)^{4\times 3} + x\left(1+\frac{0{,}365}{4}\right)^{4\times 1} + x$$

$$\Rightarrow 45.000{,}00 = x\left[\left(1+\frac{0{,}365}{4}\right)^{12} + \left(1+\frac{0{,}365}{4}\right)^{4} + 1\right]$$

$$\Rightarrow 45.000{,}00 = x\left[(1{,}09125)^{12} + (1{,}09125)^{4} + 1\right]$$

$$\Rightarrow 45.000{,}00 = x\left[2{,}85162 + 1{,}41807 + 1\right] = x\left[5{,}26968\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{45.000{,}00}{5{,}26968} = 8.539{,}41.$$

Portanto, o valor de cada pagamento é R$ 8.539,41.

Exemplo 2.28 A loja Facilita Tudo vende um eletrodoméstico em 4 prestações mensais, iguais e sucessivas no valor de R$ 145,00, vencendo a primeira prestação daqui a 30 dias. Se a taxa de juros da loja é de 3,5% *am*, calcular o preço à vista desse eletrodoméstico.

Resolução: Aqui, *i* = *3,5% am*, veja a Figura 5.

$PV = ?$	145	145	145	145
00	11	22	33	4 (meses)
			x	x
DF	(←)	(←)	(←)	(←)

Figura 5: Problema sobre equivalência de capitais
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

Considerando data focal zero, você tem a seguinte equação de valor

$$PV = \frac{145,00}{(1,035)^1} + \frac{145,00}{(1,035)^2} + \frac{145,00}{(1,035)^3} + \frac{145,00}{(1,035)^4}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{145,00}{1,035} + \frac{145,00}{1,07123} + \frac{145,00}{1,10872} + \frac{145,00}{1,14752}$$

$$\Rightarrow PV = 140,09 + 135,36 + 130,78 + 126,36 = 532,60.$$

Portanto, o preço a vista do eletrodoméstico é R$ 532,60.

Saiba mais ...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte algumas das seguintes referências:

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática Financeira e Suas Aplicações*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

GUERRA, Fernando. *Matemática financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática financeira*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

Resumindo

Nesta Unidade você estudou os tipos de descontos simples (comercial e racional) de um título, bem como calcular a taxa efetiva de desconto simples.

Você aprendeu também os tipos de descontos compostos (comercial e racional) de um título, e finalmente estudou equivalência de capitais no regime de juros compostos.

Como foi o estudo desta Unidade? Vamos descobrir? Para isso realize as atividades que foram propostas a seguir e não deixe de reler o conteúdo e/ou solicitar a ajuda de seu tutor se ocorrendo dúvidas.

Atividades de aprendizagem

1. Uma instituição financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de R$ 12.000,00, e o segundo em 1 ano e meio, no valor de R$ 15.000,00. O cliente aceita a oferta assinando uma Nota Promissória, com vencimento para 8 meses. Sabendo-se que a taxa de desconto racional da operação é de 28% *aa*, calcular o valor da Nota Promissória em seu vencimento.
2. Certa pessoa deve dois títulos: o primeiro de R$ 18.000,00, com vencimento para um ano e o segundo de R$ 25.000,00, com vencimento para 3 anos. Por problemas financeiros pretende pagar esses

dois compromissos de uma só vez, mas somente daqui a 4 anos. Adotando-se a taxa de desconto racional de 18% *aa*, com capitalização semestral, calcular o valor do novo título.

3. Uma dívida de R$ 14.000,00, com vencimento em 10 meses, é substituída por uma parcela de R$ 3.000,00, com vencimento para 2 meses, outra de R$ 6.500,00 com vencimento para 5 meses, e uma terceira a ser paga na data do vencimento da dívida original. Calcular o valor da terceira parcela, sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 24% *aa*.

4. Antônio José tem as seguintes obrigações financeiras com José Antônio:

   Dívida de R$ 2.000,00 vencível ao final de um mês.

   Dívida de R$ 3.400,00 vencível ao final de 5 meses.

   Dívida de R$ 5.000,00 vencível ao final de 10 meses.

   Prevendo dificuldades no pagamento destes compromissos Antônio José propõe substituir este plano original por dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro de hoje a 12 meses e o segundo ao final de 15 meses. Determinar o valor desses pagamentos para uma taxa de desconto racional de 25% *aa*.

5. Na venda de um equipamento, a loja Felicidade oferece duas alternativas a seus clientes:

   1ª alternativa: R$ 5.000,00 de entrada mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de R$ 7.000,00 e a segunda de R$ 10.000,00;

   2ª alternativa: sem entrada, sendo o pagamento efetuado em 4 parcelas trimestrais: R$ 4.500,00 nas duas primeiras e R$ 6.000,00 nas duas últimas. Qual a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos a taxa de juros de mercado de 5,5% *am*?

A partir deste momento, passaremos a estudar rendas certas ou série de pagamentos ou de recebimentos.

3

UNIDADE

Rendas

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de aprender a diferenciar os diversos tipos de rendas; de saber calcular o valor presente e o valor futuro de uma renda imediata, bem como de aprender a calcular o valor presente e o montante de uma renda antecipada. Também deverá adquirir a capacidade de poder interpretar uma renda diferida e de calcular o seu valor presente, de compreender renda perpétua e de calcular o seu valor presente e, ainda, de praticar o cálculo do valor presente de uma renda variável e de aplicar a equivalência de fluxos de caixa.

Rendas ou Série de Pagamentos ou Recebimentos

Caro estudante,

Bem-vindo à Unidade 3.

Nas Unidades anteriores foram analisados e estudados os tipos de operações financeiras, em que um capital era aplicado para formação de um montante ou uma dívida era saldada em pagamento único, e realizamos operações financeiras de descontos de títulos.

Nesta Unidade serão analisadas operações financeiras que envolvem conjuntos de capitais disponíveis em datas diferentes. Sabemos que em algumas operações financeiras o capital pode ser pago, ou recebido, de uma só vez ou, ainda, através de uma sequência ou série finita ou infinita de pagamentos ou de recebimentos. Então vamos começar.

Quando o nosso objetivo é constituir um capital em uma data futura temos um processo de CAPITALIZAÇÃO. Caso contrário, quando queremos pagar uma dívida, temos um processo de AMORTIZAÇÃO.

Pode ocorrer também o caso em que tenhamos pagamento pelo uso sem que tenhamos amortização: é o caso dos aluguéis.

Estas situações caracterizam a existência de rendas ou série de pagamentos ou de recebimentos. Isto nos leva às seguintes definições.

- **Rendas certas ou determinísticas**. São aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. As rendas certas são estudadas pela matemática financeira. Chamamos de rendas, de série de pagamentos ou recebimentos, série de prestações ou anuidades a toda sequência finita ou infinita de PAGAMENTOS ou RECEBIMENTOS em datas previamente estipuladas.

Cada um destes pagamentos ou recebimentos, referidos a uma mesma taxa de juros compostos, será chamado de TERMO DA SÉRIE ou TERMO DA ANUIDADE.

O intervalo de tempo entre dois termos chama-se PERÍODO, e a soma dos períodos define a DURAÇÃO da série de pagamentos ou anuidades.

O valor atual ou valor presente de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta realizada para uma mesma data e à mesma taxa de juros compostos.

Analogamente, o montante ou valor futuro de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos montantes ou valores futuros de seus termos, considerada uma dada taxa de juros compostos e uma data.

Classificação das Rendas ou Séries de Pagamentos

As rendas ou séries de pagamentos podem ser classificadas:

- **Quanto ao número de termos:**
  - FINITA: Quando existir a última prestação.
  - INFINITA OU PERPÉTUA: Quando não existir a última prestação.
- **Quanto à natureza de seus termos:**
  - UNIFORME: Quando todos os termos forem iguais.
  - NÃO UNIFORME OU VARIÁVEL: Quando os termos forem diferentes.
- **Quanto ao intervalo entre seus termos:**
  - PERIÓDICA: Quando o intervalo entre dois termos sucessivos for constante.
  - NÃO-PERIÓDICA: Quando o intervalo entre dois termos sucessivos não for constante.
- **Quanto à forma de pagamento ou recebimento:**
  - **IMEDIATAS:** Quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

  - POSTECIPADAS OU VENCIDAS: Quando os termos ocorrerem ao final de cada período.
  - ANTECIPADA: Quando os termos ocorrerem no início de cada período.
- **DIFERIDAS:** Se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período e a este prazo damos o nome de PRAZO DE DIFERIMENTO ou PRAZO DE CARÊNCIA.
  - POSTECIPADAS OU VENCIDAS: Se os termos são exigíveis no fim dos períodos.
  - ANTECIPADAS: Se os termos são exigíveis no início dos períodos.

Cálculo do Valor Presente de Uma Renda Imediata

Seja um capital PV a ser pago em n termos iguais PMT, imediatos postecipados e periódicos. Seja também uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos termos, conforme fluxo de caixa que segue para a amortização.

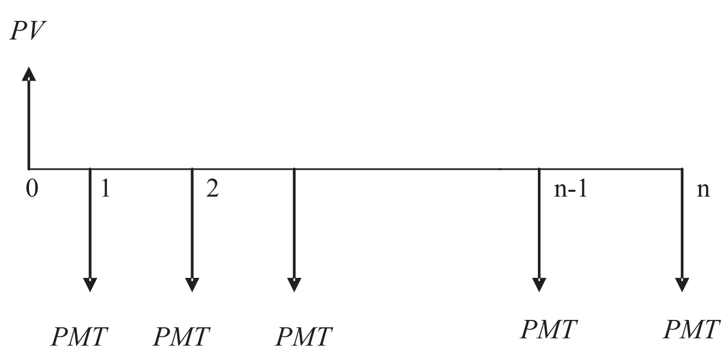

Figura 6: Fluxo de caixa sob o ponto de vista do cliente
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

É fácil verificar que o valor presente PV de uma renda imediata, de n termos PMT, a uma taxa i , dada no mesmo período dos termos, é dado pela fórmula

$$PV = PMT \times a_{\overline{n}|i} \quad \text{ou} \quad PV = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

onde

$a_{\overline{n}|i}$ lê-se **"a** n **cantoneira** i**"** ou simplesmente **"a** n i**"** e $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ é o fator de valor presente de uma renda imediata de PMT para PV, que só depende de i e n.

Para calcular PMT vem

$$PMT = PV \times \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{PV}{a_{\overline{n}|i}}$$

onde

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

é o fator de recuperação do capital de uma renda imediata de PV para PMT, que só depende de i e n.

Exemplo 3.1. A loja "Barateira" vende certo eletrodoméstico em 6 prestações mensais iguais de R$ 81,43, sendo a primeira paga 30 dias após a compra. A taxa de juros do crédito pessoal da loja é de 4,5% *am*. Qual o preço à vista dessa mercadoria?

Resolução: Dados do problema:

$n = 6$ meses

$i = 4{,}5\%\ am = 0{,}045\ am$

$PMT = 81{,}43$

$PV = ?$

Pela fórmula do valor $PV = PMT \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, vem

$$\begin{aligned} PV &= 81{,}43 \times \frac{1-(1+0{,}045)^{-6}}{0{,}045} \\ &= 81{,}43 \times \frac{1-(1{,}045)^{-6}}{0{,}045} \\ &= 81{,}43 \times \frac{1-0{,}76790}{0{,}045} \\ &= 81{,}43 \times \frac{0{,}23210}{0{,}045} \\ &= 81{,}43 \times 5{,}15778 = 420{,}00. \end{aligned}$$

Portanto, o preço à vista do eletrodoméstico é R$ 420,00.

Para resolver o exemplo anterior na HP12C, você digita

f REG

4.5 *i*

6 *n*

81,43 *CHS PMT PV* aparecendo no visor 420,00.

Exemplo 3.2. Um televisor em cores custa R$ 3.500,00 à vista, mas pode ser financiado sem entrada em 18 prestações mensais iguais e sucessivas à taxa de juros de 2,5% *am*. Calcular o valor da prestação a ser paga pelo comprador.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 2.500,00$

$n = 18$

$i = 2,5\%\ am = 0,025\ am$

$PMT = ?$

Aplicando a fórmula $PMT = PV \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ vem

$$PMT = 3.500,00 \times \frac{0,025}{1-(1,025)^{-18}}$$

$$= \frac{3.500,00 \times 0,025}{1-(1,025)^{-18}}$$

$$= \frac{87,50}{1-0,641166}$$

$$= \frac{87,50}{0,358834} = 243,85.$$

Portanto, o valor da prestação é R$ 189,54.

Para resolver o exemplo anterior na HP12C, você digita

f REG

2.5 *i*

18 *n*

3500 *CHS PMT PV* aparecendo no visor 189,54.

Exemplo 3.3. Um apartamento foi adquirido com uma entrada de R$ 30.000,00, mais 48 prestações mensais imediatas de R$ 3.339,69. Qual o preço a vista do apartamento se a taxa do mercado imobiliário é 1,25% *am*?

Resolução: Dados do problema:

E = Entrada = 30.000,00

Parte financiada:

PMT = 3.339,59

n = 48 meses

i = 1,25% *am* = 0,0125 *am*

PV = ?

Neste caso, para calcular o valor presente ou preço a vista, temos a fórmula

$$PV = E + PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

assim,

$$\begin{aligned} PV &= 30.000{,}00 + 3.339{,}69 \times \frac{1-(1+0{,}0125)^{-48}}{0{,}0125} \\ &= 30.000{,}00 + 3.339{,}69 \times \frac{1-(1{,}0125)^{-48}}{0{,}0125} \\ &= 30.000{,}00 + 3.339{,}69 \times \frac{1-0{,}55086}{0{,}0125} \\ &= 30.000{,}00 + 3.339{,}69 \times \frac{0{,}44914}{0{,}0125} \\ &= 30.000{,}00 + 120.000{,}00 \\ &= 150.000{,}00. \end{aligned}$$

Portanto, o preço à vista do apartamento é R$ 150.000,00.

Para resolver este exemplo na HP12C, digite

f REG

3339.69 *CHS PMT*

1.25 *i*

48 *n*

PV aparecendo no visor 120.000,00

30.000 + aparecendo no visor 150.000,00.

Para você ter certeza de que entendeu o conteúdo até aqui proposto, faça as atividades que seguem. Mas se surgirem dúvidas ao longo da resolução dos exercícios, releia o texto e/ou procure seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Um empréstimo será liquidado em 12 prestações de R$ 135,78 todo final de mês. Se a taxa de juros é de 2,5% *am*, determinar o valor do empréstimo.
2. Uma mercadoria, à vista, custa R$ 4.500,00, podendo ser adquirida em 9 prestações mensais, sendo a primeira paga um mês após a compra à taxa de 4,5% *am*. Calcule o valor de cada prestação.
3. Certa empresa pretende comprar um equipamento cujo preço à vista é de R$ 10.000,00. A empresa vendedora exige 10% sobre o preço à vista como entrada e financia o restante à taxa de juros compostos de 6% *am*. A empresa compradora dispõe para pagar, mensalmente, a quantia de R$ 747,41. Nessas condições, calcular o número de prestações.
4. Um empréstimo de R$ 20.000,00 deve ser liquidado mediante o pagamento de 24 prestações mensais, iguais e sucessivas. Determinar o valor dessas prestações sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 24% *aa*, capitalizados mensalmente, e que a primeira prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.

5. Um aparelho de som custa R$ 3.500,00, à vista, e será vendido em 18 prestações mensais iguais de R$ 249,98, sendo a primeira paga um mês após a compra.Determinar a taxa de juros mensal cobrada na operação.
6. Um terreno foi comprado com uma entrada de R$ 60.000,00 e 36 prestações mensais imediatas de R$ 3.813,19. Determinar o preço à vista do terreno se a taxa do mercado imobiliário é 1,25% *am*.

Cálculo do Montante de Uma Renda Imediata

Seja um processo de capitalização em que são aplicados n parcelas iguais a PMT, periódicas e postecipadas, a uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos termos. O problema é determinar o montante (FV) na data focal n, que resulta deste processo de capitalização, conforme fluxo de caixa a seguir.

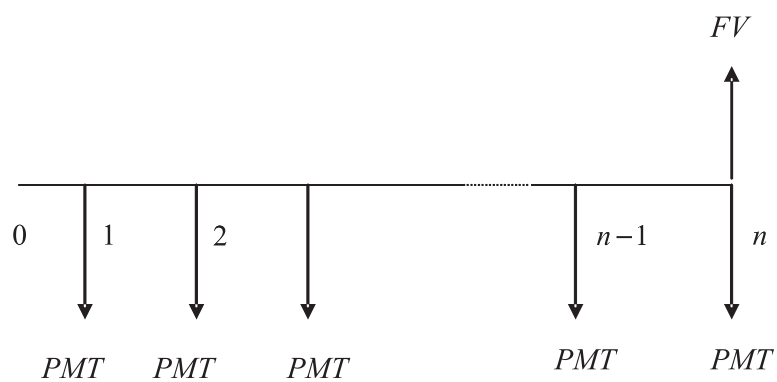

Figura 7: Fluxo de caixa sob o ponto de vista do cliente
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

O valor futuro ou o montante (FV) é o resultado da soma dos montantes de cada um dos termos (PMT), à taxa de juros i, na data focal n é dado pela fórmula

$$FV = PMT \times s_{\overline{n|}i} \quad \text{ou} \quad FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

onde $s_{\overline{n|}i}$ lê-se **"s** n **cantoneira** i" ou simplesmente **"s** n i" e $s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o fator de acumulação de capital de uma renda imediata de PMT para FV, que só depende de i e n.

Para calcular PMT, vem

$$PMT = FV \times \frac{1}{s_{\overline{n|}i}} = \frac{FV}{s_{\overline{n|}i}}$$

onde

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

é o fator de formação do capital de uma renda imediata de FV para PMT , que só depende de i e n.

Exemplo 3.4. O Sr. Justino deposita mensalmente R$ 450,00 no Banco Alegria. Sabendo-se que a taxa de juros da aplicação é de 1,12% *am*, quanto possuirá ao final de dois anos?

Resolução: Dados do problema:

$PMT = 450{,}00$

$i = 1{,}12\%\ am = 0{,}0112\ am$

$n = 2$ anos $= 24$ meses

$FV = ?$

Aplicando a fórmula do montante anterior, obtemos

$$FV = PMT \times s_{\overline{n|}i} = 450{,}00 \times s_{\overline{24|}1{,}12}$$

$$\Rightarrow FV = 450{,}0 \times \frac{(1+0{,}0112)^{24} - 1}{0{,}0112}$$

$$\Rightarrow FV = 450{,}00 \times \frac{(1{,}0112)^{24} - 1}{0{,}0112}$$

$$\Rightarrow FV = 450{,}00 \times \frac{1{,}30644 - 1}{0{,}0112}$$

$$\Rightarrow FV = 450{,}00 \times \frac{0{,}30644}{0{,}0112}$$

$$\Rightarrow FV = 450{,}00 \times 27{,}36071 = 12.312{,}32.$$

Portanto, o Sr. Justino terá ao final de dois anos R$ 12.312,32.

Exemplo 3.5. Certa pessoa deseja comprar um carro por R$ 25.000,00 à vista, daqui a 18 meses. Admitindo-se que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em título de renda fixa rendendo 2,3% *am* de juros compostos, determinar quanto deve ser poupado mensalmente.

Resolução: Dados do problema:

$FV = 25.000,00$

$i = 2,3\%\ am = 0,023\ am$

$n = 18$ meses

$PMT = ?$

Aplicando a fórmula, vem

$$
\begin{aligned}
PMT &= FV \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \\
&= 25.000,00 \times \frac{0,023}{(1+0,023)^{18} - 1} \\
&= \frac{25.000,00 \times 0,023}{(1,023)^{18} - 1} \\
&= \frac{25.000,00 \times 0,023}{1,50578 - 1} \\
&= \frac{575,00}{0,50578} = 1.136,86.
\end{aligned}
$$

Portanto, deve ser poupado mensalmente R$ 1.136,86.

Apresentamos a seguir várias atividades para que você possa treinar e consolidar seus conhecimentos. Se após o término delas dúvidas persistirem, retorne ao texto para rever os conceitos.

Atividades de aprendizagem

1. O Sr. Justino deposita mensalmente R$450,00 no banco Alegria. Sabendo-se que a taxa de juros da aplicação é de 1,12% *am*, quanto possuirá ao final de dois anos?
2. Certa pessoa deseja comprar um carro por R$ 25.000,00 à vista, daqui a 18 meses. Admitindo-se que ela vá poupar certa quantia mensal que será aplicada em título de renda fixa rendendo 2,15% *am* de juros compostos, determinar quanto deve ser poupado mensalmente.
3. Um investidor aplica mensalmente R$ 1.243,57 em uma instituição financeira, gerando um montante no valor de R$ 9.500,00 na data do último depósito. Sabendo-se que a taxa contratada é de 2,9% *am* e que o primeiro depósito é feito um mês após a data da operação, calcular o número de depósitos mensais.
4. Quanto uma pessoa deve depositar mensalmente, durante 18 meses, em um fundo de investimento que rende 1,5% *am*, para, no instante do último depósito, tenha um montante de R$ 30.000,00?
5. O Sr. Natanael Bom de Bico está programando uma viagem para o exterior e para isso necessita poupar R$ 25.000,00 para daqui a dois anos. Admitindo que ele vá poupar certa quantia mensal aplicando em um título de renda fixa rendendo 1,95 % *am*, determinar quanto o Sr. Natanael Bom de Bico deve poupar mensalmente.

Cálculo do Valor Presente e do Montante de Uma Renda Antecipada

Seja um capital PV a ser pago em n prestações iguais a PMT, antecipadas, imediatas e periódicas, a uma taxa de juros i, então o valor presente (PV) é dado pela fórmula

$$PV = PMT \times (1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = PMT \times (1+i) \times a_{\overline{n|}i}.$$

Seja um processo de capitalização em que são depositados n parcelas iguais a PMT, antecipadas, imediatas e periódicas, a uma taxa de juros i, então o montante (FV) é dado pela fórmula

$$FV = PMT \times (1+i) \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = PMT \times (1+i) \times s_{\overline{n|}i}.$$

Exemplo 3.6. Quanto devemos depositar, a partir de hoje, no início de cada mês, em uma instituição financeira que paga 2,45% *am* para constituir um montante de R$ 5.300,00, ao final de 2 anos?

Resolução. Dados do problema:

i = 2,45% *am* = 0,0245 *am*

n = 2 anos = 24 meses

FV = 5.300,00

PMT = ?

Aplicando a fórmula do montante dada, temos

$$FV = PMT(1+i)s_{\overline{n|}i}$$

$$\Rightarrow 5.300,00 = PMT\,(1+0,0245)s_{\overline{24|}\,2,45}$$

$$\Rightarrow 5.300,00 = PMT \times (1,0245) \times \frac{(1,0245)^{24}-1}{0,0245}$$

$$\Rightarrow 5.300,00 = PMT \times (1,0245) \times \frac{1,787669-1}{0,0245}$$

$$\Rightarrow 5.300,00 = PMT \times (1,0245) \times 32,149755$$

$$\Rightarrow 5.300,00 = PMT \times 32,937424$$

$$\Rightarrow PMT = \frac{5.300,00}{32,937424} = 160,91.$$

Portanto, o valor a ser depositado mensalmente é R$ 160,91.

Para resolver, este exemplo na HP12C, digite
f REG
g BEG
5300 *CHS FV*
2.45 *i*
24 *n PMT* aparecendo no visor 160,91.

Exemplo 3.7. Calcular o montante, ao final de 15 meses, resultante da aplicação de 15 parcelas mensais e iguais no valor de R$ 789,86 à taxa de 1,25% *am*, sendo que a primeira aplicação é feita hoje.

Resolução. Dados do problema:

$i = 1{,}25\%\ am = 0{,}0125\ am$

$n = 15$ meses

$PMT = 787{,}86$

$FV = ?$

Aplicando a fórmula do montante para renda antecipada, você tem

$$FV = PMT(1+i)s_{\overline{n}|i}$$
$$\Rightarrow FV = 789{,}86 \times (1{,}0125) \times \frac{(1{,}0125)^{15} - 1}{0{,}0125}$$
$$\Rightarrow FV = 789{,}86 \times (1{,}0125) \times 16{,}3863$$
$$\Rightarrow FV = 13.104{,}70.$$

Portanto, o montante ao final de 15 meses é R$ 13.104,70.

Para resolver este exemplo na HP12C, digite
f REG
g BEG
789.86 *CHS PMT*
1.25 *i*
15 *n FV* aparecendo no visor 13.104,70.

Exemplo 3.8. Quantas aplicações mensais de R$ 1.000,00 serão necessárias para obter um montante no valor de R$ 33.426,47, sabendo que a taxa de juros é de 3% *am*, e que a primeira aplicação é feita no ato da assinatura do contrato e a última 30 dias antes do resgate daquele valor.

Resolução: Dados do problema:

$i = 3\%\ am = 0{,}03\ am$

$PMT = 1000{,}00$

$FV = 33.426{,}47$

$n = ?$

Usando diretamente a fórmula $FV = PMT\,(1 + i)\, s_{\overline{n}|i}$, temos

$$33.426{,}47 = 1.000{,}00 \times (1+0{,}03) \times \frac{(1+0{,}03)^n - 1}{0{,}03}$$

$$\Rightarrow 33.426{,}47 = 1.000{,}00 \times (1{,}03) \times \frac{(1{,}03)^n - 1}{0{,}03}$$

$$\Rightarrow 33.426{,}47 = 1.030{,}00 \times \frac{(1{,}03)^n - 1}{0{,}03}$$

$$\Rightarrow 33.426{,}47 \times 0{,}03 = 1.030{,}00 \text{ x } (1{,}03)^n - 1$$

$$\Rightarrow 1.002{,}79 = 1.030{,}00 \text{ x } (1{,}03)^n - 1$$

$$\Rightarrow (1{,}03)^n - 1 = \frac{1.002{,}79}{1.030{,}00} = 0{,}97358$$

$$\Rightarrow (1{,}03)^n = 0{,}97358 + 1 = 1{,}97358$$

ou seja,

$$(1{,}03)^n = 1{,}97358$$

$$\Rightarrow \ln(1{,}03)^n = \ln(1{,}97358)$$

$$\Rightarrow n \times \ln(1{,}03) = \ln(1{,}97358)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(1{,}97358)}{\ln(1{,}03)} = 23.$$

Portanto, o número de aplicações mensais é 23.

Para resolver, este exemplo na HP12c, digite

f REG

g BEG

33426.47 *CHS FV*

3 *i*

1000 PMT n aparecendo no visor 23.

Seguem mais algumas atividades para que você aplique o conteúdo proposto. Caso surjam dúvidas procure seu tutor e/ou releia o texto.

Atividades de aprendizagem

1. Uma mercadoria custa R$ 5.600,00 à vista, podendo ser vendida em 9 prestações mensais iguais, à taxa de 3,45% *am*, sendo a primeira paga no ato da compra. Determinar o valor de cada prestação.
2. Uma pessoa deve pagar por um financiamento de 18 prestações mensais antecipadas de R$ 358,47 cada uma. Determinar o valor financiado se a taxa de juros cobrada na operação for de 2,75% *am*.
3. Quanto deveremos aplicar mensalmente, à taxa de 1,5% *am*, para ter um montante de R$ 14.000,00 ao final do 24º mês, de acordo com o conceito de renda imediata postecipada e o conceito de renda antecipada?
4. Uma bicicleta foi vendida em 12 prestações mensais iguais no valor de R$ 182,19, sendo a primeira paga no momento da compra. Se a taxa de juros é de 3,75% *am*, qual o preço à vista da bicicleta?
5. Uma empresa deve pagar um título de R$ 60.000,00 daqui a um ano e meio. Quanto deverá investir mensalmente, a partir de hoje, se os depósitos forem iguais e remunerados a 1,75% *am*, para que, um mês após o último depósito, o saldo seja suficiente para pagar o título?

Cálculo do Valor Presente de Uma Renda Diferida

Suponhamos uma renda de n termos PMT, diferida (carência) de m períodos, da qual queremos calcular o valor presente PV com taxa i dada para o período da renda. Então, para uma renda diferida de m períodos, o valor presente é dado pela fórmula

$$PV = PMT \times (1+i)^{-m} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{PMT \times a_{\overline{n|}i}}{(1+i)^m}.$$

Para calcular o valor das prestações (PMT), temos

$$PMT = \frac{PV \times i \times (1+i)^m}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{PV \times (1+i)^m}{a_{\overline{n|}i}}.$$

Exemplo 3.9. Um consumidor adquire uma geladeira pelo sistema de crediário, para pagamento em 12 prestações mensais iguais no valor de R$ 365,87. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pela loja é de 2,5% *am* e que a primeira prestação será paga no quarto mês (carência de três meses), calcular o valor financiado pelo consumidor.

Resolução. Dados do problema:

$i = 2{,}5\%\ am = 0{,}025\ am$

$PMT = 365{,}87$

$n = 12$ meses

$m = 3$ meses

$PV = ?$

Aplicando a fórmula $PV = \dfrac{PMT \times a_{\overline{n|}i}}{(1+i)^m}$, temos

$$PV = \frac{365{,}87 \times \dfrac{1-(1{,}025)^{-12}}{0{,}025}}{(1{,}025)^3} = \frac{365{,}87 \times \dfrac{1-0{,}74356}{0{,}025}}{1{,}07689}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{365{,}87 \times 10{,}25776}{1{,}07689} = 3.485{,}04.$$

Portanto, o valor financiado pelo consumidor é R$ 3.485,04.

Para resolver este exemplo na HP12C, digite

f REG

365.87 *CHS PMT*

2.5 *i*

12 *n PV* aparecendo no visor 3.753,01

f FIN CHS FV

2.5 *i*

3 *n PV* aparecendo no visor 3.485,04.

Exemplo 3.10. Resolver o exemplo 3.9 considerando-se que a loja concedeu carência de 4 meses.

Resolução. Dados do problema:

$i = 2{,}5\%\ am = 0{,}025\ am$

$PMT = 365{,}87$

$n = 12$ meses

$m = 4$ meses

$PV = ?$

Pela fórmula $PV = \dfrac{PMT \times a_{\overline{n|}i}}{(1+i)^m}$, temos

$$PV = \frac{365{,}87 \times \dfrac{1-(1{,}025)^{-12}}{0{,}025}}{(1{,}025)^4} = \frac{365{,}87 \times \dfrac{1-0{,}74356}{0{,}025}}{1{,}07689}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{365{,}87 \times 10{,}25776}{1{,}10381} = 3.400{,}05.$$

Portanto, o valor financiado pelo consumidor é R$ 3.400,05.

Para resolver este exemplo na HP12C, digite

f REG

365.87 *CHS PMT*

2.5 *i*

12 *n PV* aparecendo no visor 3.753,01

f FIN CHS FV

2.5 *i*

4 *n PV* aparecendo no visor 3.400,04.

Cálculo do Valor Presente de Uma Renda Perpétua

Suponhamos, agora, que a renda imediata é perpétua, isto é, tem um número infinito de termos *PMT* e seu valor presente *PV* com uma taxa *i* referida ao mesmo período dos termos da renda é dado pela fórmula

$$PV = \frac{PMT}{i}.$$

Exemplo 3.11. Se um apartamento está rendendo um aluguel de R$ 600,00 por mês e se a taxa da melhor aplicação no mercado financeiro é de 1% *am*, qual seria uma primeira estimativa do valor do imóvel?

Resolução. Dados do problema:

$PMT = 365{,}87$

$i = 1\%\ am = 0{,}01\ am$

$PV = ?$

Aplicando a fórmula $PV = \frac{PMT}{i}$, obtemos

$$PV = \frac{PMT}{i} = \frac{600{,}00}{0{,}01} = 60.000{,}00.$$

Portanto, o valor do imóvel é R$ 60.000,00.

Exemplo 3.12. Uma dívida de R$ 7.000,00 deverá ser resgatada em prestações perpétuas mensais, com 6 meses de carência a juros de 2,5% *am*, determinar o valor das prestações.

Resolução. Dados do problema:

$PV = 7000{,}00$

$i = 2{,}5\%\ am = 0{,}025\ am$

$m = 6$ meses

$PMT = ?$

Aplicando a fórmula $PV = \frac{PMT}{i \times (1+i)^m}$, obtemos

$PMT = PV \times i \times (1 + i)^m = 7.000{,}00 \times 0{,}025 \times (1{,}025)^6 = 202{,}95.$

Portanto, o valor da prestação perpétua é R$ 202,95.

Exemplo 3.13. Uma dívida de R$ 6.000,00 será resgatada em prestações perpétuas trimestrais de R$ 450,00, determinar a taxa de juros trimestral da operação.

Resolução. Dados do problema:

Aplicando a fórmula $PV = \frac{PMT}{i}$ vem

$$PV = \frac{PMT}{i}$$

$$\Rightarrow 6.000{,}00 = \frac{450{,}00}{i}$$

$$\Rightarrow i = \frac{450}{6000} = 0{,}075.$$

ou

$$i = 7{,}5\% \ at.$$

Portanto, a taxa de juros é 7,5% *at*.

As atividades de aprendizagem são a melhor forma de você saber se está assimilando o conteúdo proposto, portanto não deixe de fazê-las e sempre procure ajuda quando tiver dúvidas.

Atividades de aprendizagem

1. Uma mercadoria que custa R$ 15.800,00 será paga em 15 prestações mensais iguais, sendo a primeira paga 13 meses após a compra (12 meses de carência), a uma taxa de 3,5% *am*. Determinar o valor de cada prestação.

2. Uma pessoa efetua 10 depósitos mensais iguais de R$ 245,00. Se a taxa de juros da operação é de 1,75% *am*, quanto essa pessoa terá 7 meses após o último depósito?
3. Determinar o preço à vista de uma televisão em cores vendida em 12 prestações mensais iguais de R$ 367,79 sem entrada, a primeira prestação foi paga 5 meses após a compra e a loja cobra 4,75% *am* de juros.
4. O valor de um equipamento é de R$ 80.000,00. Como alternativa o fornecedor aluga o equipamento por dois anos, sendo de R$ 3.000,00 o aluguel mensal no primeiro ano e de R$ 5.000,00 o aluguel mensal no segundo ano, vencendo o aluguel ao final de cada mês. O equipamento, ao término do contratado é vendido ao cliente por seu valor residual. Qual é o valor residual do equipamento, se a taxa de juros da operação for de 2,5% *am*?
5. Um empréstimo de R$ 100.000,00 é realizado com uma taxa de juros de 10% *aa* e deve ser amortizado no prazo de 10 anos, com os dois primeiros anos de carência. Determinar o valor das oito prestações anuais, iguais e sucessivas que deverão ser pagas a partir do final do terceiro ano, nas seguintes hipóteses:
   a) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência são pagos ao final de cada ano;
   b) os juros devidos nos dois primeiros anos de carência são capitalizados.
6. Uma residência foi alugada por R$ 3.500,0 mensais para a Clínica Bate Coração. Se a taxa de melhor aplicação no mercado financeiro paga juros de 1,75% *am*, qual seria o provável preço do imóvel?
7. Uma pessoa adquiriu um apartamento por R$ 120.000,00. Por quanto deverá alugar mensalmente para receber o equivalente a uma aplicação no mercado financeiro de 1,5% *am*?

Cálculo do Valor Presente de Uma Renda Variável

Uma renda é chamada variável quando os termos não são iguais entre si.

O valor presente de uma renda variável é calculado como sendo a soma dos valores presentes de cada um de seus termos e é dado pela fórmula

$$PV = \frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$$

onde PMT_1, PMT_2,..., PMT_n são os termos da renda variável.

Exemplo 3.14. Um imóvel foi adquirido para ser pago em cinco prestações trimestrais, com os seguintes valores:

Primeiro trimestre: R$ 15.000,00.

Segundo trimestre: R$ 20.000,00.

Terceiro trimestre: R$ 30.000,00.

Quarto trimestre: R$ 25.000,00.

Quinto trimestre: R$ 12.000,00.

Se a taxa de juros para aplicações financeiras vigente no mercado é de 1,25% *am*, determinar o valor do imóvel.

Resolução: Dados do problema:

i = 1,25% *am* = 0,0125 *am*

PMT_1 = 15.000,00;

PMT_2 = 20.000,00;

PMT_3 = 30.000,00;

PMT_4 = 25.000,00;

PMT_5 = 12.000,00; e

PV = ?

Aplicando a fórmula, vem

$$PV = \frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$$

$$PV = \frac{15.000,00}{(1+0,0125)^3} + \frac{20.000,00}{(1+0,0125)^6} + \frac{30.000,00}{(1+0,0125)^9}$$

$$+ \frac{25.000,00}{(1+0,0125)^{12}} + \frac{12.000,00}{(1+0,0125)^{15}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{15.000,00}{(1,0125)^3} + \frac{20.000,00}{(1,0125)^6} + \frac{30.000,00}{(1,0125)^9}$$

$$+ \frac{25.000,00}{(1,0125)^{12}} + \frac{12.000,00}{(1,0125)^{15}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{15.000,00}{1,03797} + \frac{20.000,00}{1,07738} + \frac{30.000,00}{1,118229}$$

$$+ \frac{25.000,00}{1,16075} + \frac{12.000,00}{1,20483}$$

$$\Rightarrow PV = 14.451,27 + 18.536,50 + 26.826,62$$
$$+ 21.537,72 + 9.959,92$$
$$\Rightarrow PV = 91.339,03.$$

Portanto, o valor do imóvel é R$ 91.339,03.

Para resolver este exemplo na HP12C, digite
f REG
15000 *CHS FV*
1.25 *i* 3 *n PV*
20000 *CHS FV* 6 *n PV* +
30000 *CHS FV* 9 *n PV* +
25000 *CHS FV* 12 *n PV* +
12000 *CHS FV* 15 *n PV* + aparecendo no visor 91.339,03.

Equivalência de Fluxos de Caixa

Dois ou mais fluxos de caixa são equivalentes, se seus valores presentes (PV), calculados a uma mesma taxa de juros, forem iguais.

Se os fluxos de caixa tiverem o mesmo valor presente, a uma determinada taxa de juros, então seus valores futuros após n períodos obtidos com essa mesma taxa de juros são iguais.

Exemplo 3.15. A loja Topa Tudo financia um carro OK em 18 prestações mensais, sendo as 9 primeiras no valor de R$ 2.000,00 e as 9 últimas no valor de R$ 3.000,00. Se a taxa de juros da loja Topa Tudo é de 1,5% *am* e se o cliente solicitar o financiamento em 18 prestações mensais e iguais, determinar o valor da prestação mensal.

Resolução: Inicialmente você calcula o valor presente das 9 primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 cada uma e das 9 últimas no valor de R$ 3.000,00 cada uma, assim,

$$PV = 2.000,00 \times \frac{1-(1+0,015)^{-9}}{0,015} + $$

$$+3.000,00 \times (1+0,015)^{-9} \times \frac{1-(1+0,015)^{-9}}{0,015}$$

$$\Rightarrow PV = 2.000,00 \times \frac{1-(1,015)^{-9}}{0,015} +$$

$$+3.000,00 \times (1,015)^{-9} \times \frac{1-(1,015)^{-9}}{0,015}$$

$$\Rightarrow PV = 2.000,00 \times 8,3605 + 3.000,00 \times 0,8746 \times 8,3605$$

$$\Rightarrow PV = 16.721 + 21.936,13 = 38.657,13.$$

Agora, para determinar o fluxo de caixa equivalente das 9 primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 e das 9 últimas no valor de R$ 3.000,00, temos

$$PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 38.657,13 \times \frac{0,015}{1-(1+0,015)^{-18}}$$

$$\Rightarrow PMT = \frac{38.657,13 \times 0,015}{1-0,76491} = \frac{579,85}{0,23509} = 2.466,55.$$

Portanto, o fluxo de caixa das 9 primeiras prestações no valor de R$ 2.000,00 e das 9 últimas no valor de R$ 3.000,00 é equivalente ao fluxo de caixa das 18 prestações mensais no valor de R$ 2.466,55 à taxa de 1,5% *am*.

Exemplo 3.16. A imobiliária Vento e Sol vende um terreno em 5 prestações trimestrais, nos seguintes valores: Primeiro trimestre: R$ 5.000,00; Segundo trimestre: R$ 20.000,00; Terceiro trimestre: R$ 25.000,00; Quarto trimestre: R$ 15.000,00 e Quinto trimestre: R$ 30.000,00. Sendo a taxa de juros para a melhor aplicação financeira vigente no mercado de 2,5% *am*, determinar o preço a vista do terreno. Se um cliente solicitar para pagamento em 24 prestações mensais iguais, qual o valor da prestação?

Resolução: Inicialmente, você calcula o valor presente das cinco parcelas trimestrais, à taxa de 2,5% *am*, assim

$$PV = \frac{5.000,00}{(1+0,025)^3} + \frac{20.000,00}{(1+0,025)^6} + \frac{25.000,00}{(1+0,025)^9} + \frac{15.000,00}{(1+0,025)^{12}} + \frac{30.000,00}{(1+0,025)^{15}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{5.000,00}{(1,025)^3} + \frac{20.000,00}{(1,025)^6} + \frac{25.000,00}{(1,025)^9} + \frac{15.000,00}{(1,025)^{12}} + \frac{30.000,00}{(1,025)^{15}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{5.000,00}{1,0769} + \frac{20.000,00}{1,1597} + \frac{25.000,00}{1,2489} + \frac{15.000,00}{1,3449} + \frac{30.000,00}{1,4483}$$

$$\Rightarrow PV = 4.642,96 + 17.245,94 + 20.018,21 + 11.153,34 + 20.713,97$$

$$\Rightarrow PV = 73.774,41$$

Agora, para calcular o valor da prestação mensal, vem

$$PMT = 73.774,41 \times \frac{0,025}{1-(1,025)^{-24}}$$

$$= \frac{73.774,41 \times 0,025}{1-0,55288}$$

$$= \frac{1.844,36}{0,44712} = 4.124,94.$$

Portanto, o cliente irá pagar 24 prestações mensais no valor de R$ 4.124,94.

Exemplo 3.17. Um empréstimo foi liquidado em 7 prestações mensais, sendo as 3 primeiras no valor de R$ 1.500,00, as 2 seguintes no valor de R$ 2.000,00, a sexta no valor de R$ 3.000,00 e a sétima no valor de R$ 3.500,00. Sabendo-se que a taxa de juros cobrada pela instituição financeira é de 6,5% *am*, calcular o valor do empréstimo.

O fluxo de caixa dessa operação (sob o ponto de vista da instituição financeira) é dado a seguir:

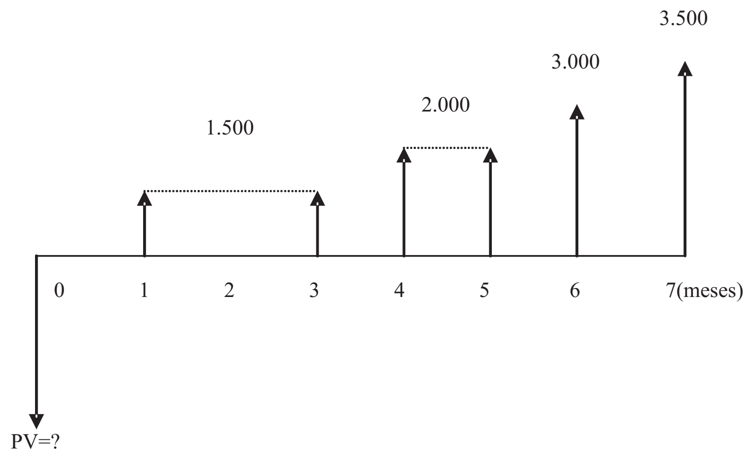

Figura 8: Fluxo de caixa do empréstimo
Fonte: Elaborada pelos autores deste livro

Resolução: Calculando o valor presente do fluxo de caixa, vem

$$PV = 1.500,00 \times \frac{1-(1,065)^{-3}}{0,065} + \frac{2.000,00}{(1+0,065)^4} + \frac{2.000,00}{(1+0,065)^5} + \frac{3.000,00}{(1+0,065)^6} + \frac{3.500,00}{(1+0,065)^7}$$

$$\Rightarrow PV = 1.500,00 \times \frac{1-(1,065)^{-3}}{0,065} + \frac{2.000,00}{(1,065)^4} + \frac{2.000,00}{(1,065)^5} + \frac{3.000,00}{(1,065)^6} + \frac{3.500,00}{(1,065)^7} =$$

$$\Rightarrow PV = 1.500,00 \times 2,6485 + \frac{2.000,00}{1,2865}$$

$$+ \frac{2.000,00}{1,3701} + \frac{3.000,00}{1,4591} + \frac{3.500,00}{1,5540}$$

$$\Rightarrow PV = 3.972,71 + 1.554,65 + 1.459,76$$
$$+ 2.056,00 + 2.252,27 = 11.295,40.$$

Logo, o valor do empréstimo é R$ 11.295,40.

Se um cliente solicitar a quantia de R$ 11.295,40 para pagamento em 18 prestações mensais iguais à mesma taxa de juros (6,5% *am*), qual o valor da prestação mensal?

Para calcular o valor da nova prestação mensal, vem

$$PMT = 11.295,40 \times \frac{0,065}{1 - (1,065)^{-18}} = 1.082,72.$$

Portanto, o valor da nova prestação mensal é R$ 1.082,72.

Saiba mais ...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte algumas de nossas referências bibliográficas:

HAZZAN,Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

GUERRA, Fernando. *Matemática financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática financeira*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1991.

Resumindo

Nesta Unidade você estudou os diversos tipos de rendas (imediatas, antecipadas, diferidas, perpétuas e variáveis) e como determinar o valor presente e o montante de cada uma delas (exceto o montante de uma renda perpétua) e também aprendeu a determinar fluxos de caixa equivalentes.

Até aqui, como você sente o conteúdo? Seguem mais atividades propostas para que resolva com base nos conceitos estudados. Caso tenha dúvidas reveja atentamente os conceitos ou exercícios resolvidos.

Atividades de aprendizagem

1. O Sr. Galileu deposita 4 parcelas da seguinte forma:
   - R$ 3.000,00 depósito inicial (hoje);
   - R$ 4.500,00 um mês após;
   - R$ 6.700,00 quatro meses após; e
   - R$ 8.500,00 nove meses após, todos os prazos em relação ao primeiro depósito.

   Calcule o saldo no momento do último depósito, sabendo que a taxa é de 2,25% *am*.
2. Um equipamento é vendido em 12 prestações mensais, sendo as seis primeiras no valor de R$ 4.500,00 e as seis últimas no valor de R$ 6.000,00. Se a taxa de juros da operação é de 4,5% *am*, determinar o preço à vista do equipamento.

3. Um terreno é vendido a prazo em 18 prestações mensais iguais de R$ 2.500,00 imediata postecipada, mais três prestações de reforço vencíveis em seis, doze e dezoito meses após a compra, cada uma de R$ 6.000,00. Determinar o preço à vista do terreno se a taxa de juros do financiamento for de 3,5% *am*.
4. Uma máquina permite uma economia de custos de R$ 5.000,00 no primeiro ano e gradativamente crescente em R$ 5.000,00 por ano até o quinto ano de sua vida útil. Considerando uma taxa de juros de 4,5% *am*, determinar o valor atual dessa economia de custos.
5. Uma pessoa aplicou R$ 8.000,00 e após dois anos e seis meses recebeu a soma total de R$ 13.462,40. Que depósitos mensais nesse período produziriam a mesma soma, se os juros sobre o saldo credor fossem beneficiados com a mesma taxa de juros da primeira hipótese?
6. Tendo comprado um bem em 18 prestações mensais e iguais de R$ 176,98, o cliente propôs sua substituição para 6 prestações trimestrais. Qual será o valor desta nova prestação, se a taxa de juros considerada for de 5% *am*?

A partir de agora, vamos navegar nos sistemas de amortizações de empréstimos mais utilizados no mercado comercial e financeiro no Brasil.

4

UNIDADE

Sistemas de Amortização de Empréstimo e Financiamento

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de saber diferenciar os dois tipos de sistemas de amortização: SAC e PRICE, de elaborar a planilha do empréstimo ou plano de amortização (com e sem carência) e de localizar na mesma o estado da dívida em um período qualquer. E ainda de: saber calcular o valor do saldo devedor, o da parcela de amortização, o da parcela de juros e o valor da prestação em um período qualquer do financiamento.

Introdução

> Nesta Unidade você terá contato com dois sistemas de amortização de empréstimo e financiamento, o SAC e o PRICE, muito conhecidos, e perceberá a importância deles dentro do sistema financeiro.
>
> Ao final desta Unidade, saberá a melhor forma de utilizá-los e proceder aos cálculos de amortização de empréstimos.
>
> Bons estudos e lembre-se que estamos sempre à disposição.

No Brasil, os mercados comerciais e financeiros adotam diversos sistemas de amortização de empréstimos. Eles diferem pelo critério de devolução do principal (PV) e pelo cálculo e pagamento dos juros (J).

Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de capitalização composta, pois, se os juros são calculados deste modo, o não pagamento de juros em um dado período levará a um saldo devedor maior, sendo calculado juro sobre juro.

Para melhor entendimento desta Unidade, daremos os principais conceitos de uso corrente nas operações de empréstimos e financiamentos, a saber:

- CREDOR: aquele que concede o empréstimo ou financiamento;
- DEVEDOR OU MUTUÁRIO: aquele que recebe o empréstimo ou financiamento;
- TAXA DE JUROS: taxa contratada entre as partes;
- PRESTAÇÃO: soma da amortização, acrescida dos juros e outros encargos financeiros pagos em um dado período;

- AMORTIZAÇÃO: refere-se às parcelas de devolução do principal (capital emprestado);
- PRAZO DE AMORTIZAÇÃO: intervalo de tempo durante o qual serão pagas as amortizações;
- SALDO DEVEDOR: trata-se do estado da dívida (débito) em determinado instante de tempo;
- IOF: imposto sobre operações financeiras;
- PRAZO DE CARÊNCIA: corresponde ao período compreendido entre a primeira liberação do empréstimo ou financiamento e o pagamento da primeira amortização;
- PRAZO TOTAL: considera-se a soma do prazo de carência com o prazo de amortização;
- PLANILHA: quadro onde são colocados os valores referentes ao empréstimo ou financiamento, constituído de várias colunas, que apresentam, após cada pagamento, a parcela de juros pagos, a amortização, a prestação, os encargos financeiros (IOF, aval, comissões, taxa de abertura de crédito, etc.) e o saldo devedor.

As formas de pagamento dos empréstimos são chamadas SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO. Os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam da forma pela qual o principal e os encargos financeiros (juros, IOF, TAC, etc.) são restituídos ao credor do capital.

Dentre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos abordaremos o sistema de amortização constante e o sistema francês ou sistema Price.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante (SAC), as parcelas de amortização do principal são sempre iguais (ou constantes). O valor da amortização (A) é calculado através da divisão do capital emprestado (PV) pelo número de amortizações (n). Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente sobre o período anterior, assumindo valores decrescentes nos períodos. A prestação, a cada período, é igual à soma da amortização e dos encargos financeiros (juros, comissões, etc.), sendo periódica, sucessiva e decrescente em progressão aritmética, de razão igual ao produto da taxa de juros pela parcela de amortização.

Assim,

$$A = \frac{PV}{n}.$$

Saldo devedor de ordem

$$P_{1} = P_{t-1} - A.$$

Parcela de juros de ordem t

$$J_t = i \times P_{t-1}, \text{ para } t = 1,2,3,..., n.$$

Prestação (PMT) = Amortização + encargos financeiros

Razão (G) da progressão aritmética (PA) = $G = i \times A$.

Vamos a alguns exemplos de SAC.

Exemplo 4.1. A empresa Felicidade pede emprestados R$ 100.000,00 ao banco Boa Praça que entrega o capital no ato e sem carência. Sabendo-se que, os juros serão pagos mensalmente, que a taxa de juros é de 4,5% *am* e o principal será amortizado em 10 parcelas mensais, construa a planilha do empréstimo.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 100.000,00$

$i = 4,5\%\ am = 0,045\ am$

$n = 10$ meses

Inicialmente, você calcula o valor da amortização constante, assim

$$A = \frac{PV}{n} \Rightarrow A = \frac{100.000,00}{10} = 10.000,00/\ Mês.$$

Construindo a planilha do empréstimo, vem:

Mês	Saldo Devedor (P_t)	Amortização (A)	Juros	Prestação (PMT_t)
0	100.000,00			
1	90.000,00	10.000,00	4.500,00	14.500,00
2	80.000,00	10.000,00	4.050,00	14.050,00
3	70.000,00	10.000,00	3.600,00	13.600,00
4	60.000,00	10.000,00	3.150,00	13.150,00
5	50.000,00	10.000,00	2.700,00	12.700,00
6	40.000,00	10.000,00	2.250,00	12.250,00
7	30.000,00	10.000,00	1.800,00	11.800,00
8	20.000,00	10.000,00	1.350,00	11.350,00
9	10.000,00	10.000,00	900,00	10.900,00
10	0	10.000,00	450,00	10.450,00
Total		100.000,00	24.750,00	124.750,00

Quadro 3: Planilha do Empréstimo (em R$)

Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

A planilha é autoexplicativa. A seguir mostraremos o procedimento no cálculo de alguns valores:

- O cálculo do saldo devedor de ordem t, para $t = 4$, é

$$P_1 = P_{t-1} - A$$

$$\Rightarrow P_4 = P_3 - A = 35.000,00 - 5.000,00 = 30.000,00.$$

- O cálculo do juro de ordem t, para $t = 7$, é

$$J_t = i \times P_{t-1}$$

$$\Rightarrow J_7 = 0,045 \times P_6 = 0,045 \text{ x } 40.000,00 = 1.800,00.$$

- O cálculo da prestação de ordem t, para $t = 5$, é

$$PMT_5 = A + J_5 = 10.000,00 + 2.700,00 = 12.700,00.$$

Cálculo dos Valores do SAC em um Período Qualquer

No Sistema de Amortização Constante, muitas vezes é necessário a cálculo dos valores para algum determinado período, sem a necessidade de se elaborar a planilha completa. Esses cálculos podem ser feitos usando o formulário a seguir.

- Valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem t

$$P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

- Valor da parcela de juros da prestação de ordem t

$$J_t = i \times PV \times \left(1 - \frac{t-1}{n}\right).$$

- Valor da prestação de ordem t

$$PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right].$$

- Soma dos juros acumulados do primeiro período até o período de ordem t

$$\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}.$$

- Soma das prestações acumuladas do primeiro período até o período de ordem t

$$\sum_{k=1}^{t} PMT_k = \frac{2 \times PV \times t + i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}.$$

Exemplo 4.2. Usando os valores do exemplo 4.1, calcular:

- o saldo devedor após o pagamento da sétima prestação;
- a parcela de juros da quinta prestação;
- o valor da sétima prestação;
- soma dos juros das 6 primeiras prestações; e
- a soma das 4 primeiras prestações.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 100.000{,}00$

$i = 4{,}5\%\ am = 0{,}045\ am$

$n = 10$ meses

- Pela fórmula, $P_t = PV \times \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)$, vem

$$P_7 = 100.000{,}00 \times \left(1 - \frac{7}{10}\right)$$
$$= 100.000{,}00 \times 0{,}30 = 30.000{,}00.$$

- Pela fórmula $J_t = i \times PV \times \left(1 - \dfrac{t-1}{n}\right)$, vem

$$J_5 = 0{,}045 \times 100.000{,}00 \times \left(1 - \frac{5-1}{10}\right)$$
$$= 0{,}045 \times 100.000{,}00 \times \left(1 - \frac{4}{10}\right)$$
$$= 0{,}045 \times 100.000{,}00 \times 0{,}6 = 2.700{,}00.$$

- Pela fórmula $PMT_t = \dfrac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right]$, vem

$$PMT_7 = \frac{100.000{,}00}{10} \times \left[1 + 0{,}045 \times \left(10 - 7 + 1\right)\right]$$
$$= 10.000{,}00 \times \left[1 + 0{,}045 \times 4\right] = 10.000{,}00 \times 1{,}18$$
$$= 11.800{,}00.$$

- Pela fórmula $\sum_{k=1}^{t} J_k = \dfrac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}$ vem

$$\sum_{k=1}^{6} J_k = \frac{0{,}045 \times 6 \times 100.000{,}00 \times \left(2 \times 10 - 6 + 1\right)}{2 \times 10}$$
$$= \frac{0{,}045 \times 6 \times 100.000{,}00 \times 15}{20}$$
$$= \frac{405.000{,}00}{20} = 20.250{,}00.$$

- Pela fórmula $\sum_{k=1}^{t} PMT_k = \dfrac{2 \times PV \times t + i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}$

você tem

$$\sum_{k=1}^{4} PMT_k = \frac{2 \times 100.000,00 \times 4 + 0,045 \times 4 \times 100.000,00\,(2 \times 10 - 4 + 1)}{2 \times 10}$$

$$= \frac{800.000,00 + 18.000,00 \times 17}{20}$$

$$= \frac{1.106.000,00}{20} = 55.300,00.$$

Observação 4.1. Confira os valores encontrados com os valores da planilha do empréstimo do exemplo 4.1.

Exemplo 4.3. Um financiamento de R$ 150.000,00 foi contratado à taxa efetiva de juros de 51,106866% *aa* e será pago em cinco anos, em prestações mensais pelo Sistema de Amortização Constante. Determinar:

a) o juro a ser pago no 28º mês;

b) o saldo devedor após o pagamento da metade do financiamento;

c) o valor da 48ª prestação;

d) o total de juros pagos até a 35ª prestação.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 150.000,00$

n = 5 anos = 60 meses

i = 51,106866% *aa*

Inicialmente, você calcula a taxa equivalente ao período do pagamento das prestações mensais, ou seja,

$$i_{eq} = (1,51106866)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,035 - 1 = 0,035 \Rightarrow i_{eq} = 3,5\%\ am.$$

Agora, respondendo, vem

a) $J_t = i \times PV \times \left(1 - \dfrac{t-1}{n}\right) \Rightarrow$

$$J_{28} = 0,035 \times 150.000,00 \times \left(1 - \frac{28-1}{60}\right)$$

$$= 0,035 \times 150.000,00 \times (1 - 0,45) = 2.887,50.$$

Portanto, o juro a ser pago no 28º mês é R$ 2.887,50.

b) $P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right) \Rightarrow$

$$P_{30} = 150.000{,}00 \times \left(1 - \frac{30}{60}\right) = 75.000{,}00.$$

c) $PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\,(n - t + 1)\right] \Rightarrow$

$$PMT_{48} = \frac{150.000{,}00}{60} \times \left[1 + 0{,}035 \times (60 - 48 + 1)\right]$$
$$= 2.500{,}00 \times \left[1 + 0{,}035 \times 13\right]$$
$$= 2.500{,}00 \times 1{,}455 = 3.637{,}50$$

O valor da 48ª prestação é R$ 3.637,50.

d) $\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times (2n - t + 1)}{2n} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{35} J_k = \frac{0{,}035 \times 35 \times 150.000{,}00 \times (2 \times 60 - 35 + 1)}{2 \times 60}$$
$$= \frac{183.750{,}00 \times 86}{120}$$
$$= 131.687{,}50.$$

E o total de juros pagos até a 35ª prestação é R$ 131.687,50.

Exemplo 4.4. O banco Boa Vida emprestou R$ 85.000,00 à empresa Sorriso, pelo SAC, entregue no ato, nas seguintes condições:

- taxa efetiva de juros = 90,120749% *aa*
- prazo total do financiamento = 12 meses;
- prazo de carência = 5 meses (com juros pagos neste período); e
- IOF = 1,25% do valor do empréstimo, pago quando da liberação dos recursos.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 85.000,00$

$i = 90,120749\%\ aa$

$m = 5\ meses$ (juros pagos na carência)

Prazo Total do Financiamento (PTF) = 12 meses

$$PTF = n + m \Rightarrow 12 = n + 5 \Rightarrow n = 7\ meses.$$

Calculando a taxa equivalente ao período das prestações mensais, você tem

$$i = (1,90120749)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,055 - 1 = 0,055 \Rightarrow i = 5,5\%\ am\ .$$

Cálculo do IOF: IOF = 1,25% de 85.000,00 = 1.062,50.

Mês	P_t	A	J_t	IOF	PMT_t
0	85.000,00			1.062,50	1.062,50
1	85.000,00		4.675,00		4.675,00
2	85.000,00		4.675,00		4.675,00
3	85.000,00		4.675,00		4.675,00
4	85.000,00		4.675,00		4.675,00
5	85.000,00		4.675,00		4.675,00
6	72.857,14	12.142,86	4.675,00		16.817,86
7	60.714,29	12.142,86	4.007,14		16.150,00
8	48.571,43	12.142,86	3.339,29		15.482,14
9	36.428,57	12.142,86	2.671,43		14.814,29
10	24.285,71	12.142,86	2.003,57		14.146,43
11	12.142,86	12.142,86	1.335,71		13.478,57
12	0	12.142,86	667,86		12.810,71
Total		85.000,00	42.075,01	1.062,50	127.076,07

Quadro 4: Planilha do Empréstimo (em R$)

Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Observação 4.2 Nos sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos, com carência, vamos trabalhar com rendas diferidas postecipadas.

Exemplo 4.5. O banco Boa Vida emprestou R$ 85.000,00 à empresa Sorriso, pelo SAC, entregue no ato, nas seguintes condições:

- taxa efetiva de juros = 90,120749% *aa*;
- prazo total do financiamento = 12 meses;
- prazo de carência = 5 meses (com juros capitalizados neste período e incorporados ao saldo devedor para amortização); e
- IOF = 1,25% do valor do empréstimo, pago quando da liberação dos recursos.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 85.000,00$

$i = 90,120749\%$ *aa* $= 5,5\%$ *am*

$m = 5$ meses (juros capitalizados na carência)

$PTF = 12$ meses

$n = 7$ meses

Cálculo do IOF: $IOF = 1,25\%$ de $85.000,00 = 1.062,50$.

Mês	P_I	A	J_t	IOF	PMT_t
0	85.000,00			1.062,50	1.062,50
1	89.675,00				
2	94.607,13				
3	99.810,52				
4	105.300,10				
5	111.091,60(*)				
6	95.221,37	15.870,23	6.110,04		21.980,27
7	79.351,14	15.870,23	5.237,18		21.107,40
8	63.480,91	15.870,23	4.364,31		20.234,54
9	47.610,69	15.870,23	3491,45		19.361,68
10	31.740,46	15.870,23	2.618,59		18.488,82
11	15.870,23	15.870,23	1.745,73		17.615,95
12	0	15.870,23	872,86		16.743,09
Total		111.091,60	24.440,15	1.062,50	136.594,25

Quadro 5: Planilha do Empréstimo (em R$)
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

(*) O saldo devedor do mês 5 é $P_5 = 85.000,00 \times (1,055)^5 = 111.091,60$.

Exemplo 4.6. Um empréstimo no valor de R$ 25.000,00 deverá ser amortizado pelo SAC em 48 meses a uma taxa de juros de 4,5% *am* e uma carência de 9 meses com juros capitalizados neste período. Calcular:

- o valor da 28ª prestação das 48;
- o valor da 35ª parcela de juros das 48;
- o total de juros pagos das 48 parcelas; e
- o valor do saldo devedor após o pagamento da 40ª prestação das 48.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 25.000,00$
$i = 4,5\%\ am = 0,045\ am$
$n = 48$ meses
$m = 9$ meses (juros capitalizados na carência)

Inicialmente, você calcula o valor do empréstimo corrigido em 4,5% *am* até o vencimento do período da carência (9 meses), assim

$$P_9 = 25.000,00 \times (1,045)^9 = 37.152,38.$$

Este valor, R$ 37.152,38, será amortizado em 48 meses à taxa de 4,5% *am* pelo SAC.

Agora, respondendo, vem

- Aplicando a fórmula $PMT_t = \dfrac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right]$, vem

$$PMT_{28} = \frac{37.152,38}{48} \times \left[1 + 0,045 \times \left(48 - 28 + 1\right)\right]$$
$$= 774,01 \times \left[1 + 0,045 \times 21\right]$$
$$= 774,01 \times 1,945 = 1.505,45.$$

Portanto, o valor da 20ª prestação das 48 é R$ 1.505,45.

- Aplicando a fórmula $J_t = i \times PV \times \left(1 - \dfrac{t-1}{n}\right)$, vem

$$\sum_{k=1}^{48} J_k = \frac{0{,}045 \times 48 \times 37.152{,}38 \times (2 \times 48 - 48 + 1)}{2 \times 48}$$
$$= \frac{80.249{,}144 \times 9}{96} = 40.960{,}50.$$

Portanto, o valor da 35ª parcela de juros das 48 é R$ 487,62.

- Aplicando a fórmula $\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times (2n - t + 1)}{2n}$, vem

$$\sum_{k=1}^{48} J_k = \frac{0{,}045 \times 48 \times 37.152{,}38 \times (2 \times 48 - 48 + 1)}{2 \times 48}$$
$$= \frac{80.249{,}144 \times 9}{96} = 40.960{,}50.$$

Portanto, o total de juros pagos das 48 parcelas é R$ 40.960,50.

- Aplicando a fórmula $P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right)$, vem

$$P_{40} = 37.152{,}38 \times \left(1 - \frac{40}{48}\right) = 6.192{,}06.$$

Portanto, o valor do saldo devedor após o pagamento da 40ª prestação das 48 é R$ 6.192,06.

Já passamos boa parte dos conteúdos desta Disciplina e para ter certeza de que você está compreendendo e absorvendo todos resolva as atividades que seguem, caso restem dúvidas faça uma releitura do material e/ou procure seu tutor.

Atividades de aprendizagem

1. Um empréstimo de R$ 80.000,00 deve ser devolvido pelo SAC em 5 parcelas semestrais de amortização, com dois semestres de carência, isto é, a primeira parcela é paga no terceiro semestre e os juros são pagos no período de carência à taxa de juros de 7% *as*. Elaborar a planilha do empréstimo.
2. Um imóvel é vendido por R$ 140.000,00, sendo 15% de entrada e o restante financiado pelo SAC em 10 anos, com pagamento mensal. A taxa de juros cobrada na operação é 2,5% *am*. Determine:
   - o valor da primeira e última prestação;
   - a soma das 40 primeiras prestações;
   - a soma dos juros pagos até a liquidação do débito; e
   - o valor do saldo devedor após o pagamento da metade do financiamento.
3. Um empréstimo foi amortizado pelo SAC, a uma taxa de 2,75% *am* em 72 meses, sem carência. Calcular o valor do empréstimo, sabendo-se que a soma das 35 primeiras prestações é R$ 25.940,35.
4. Um empréstimo no valor de R$ 75.000,00 deverá ser amortizado pelo SAC em 36 meses a uma taxa de juros de 3,5% *am* e uma carência de 9 meses com juros capitalizados neste período. Calcular:
   - o valor da 21ª prestação das 36;
   - o valor da 19ª parcela de juros das 36;
   - o total de juros pagos até a liquidação do débito das 36; e
   - o valor do saldo devedor após o pagamento da 24ª prestação das 36.

Sistema Francês de Amortização ou Sistema Price

O sistema francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin, no Século XVI. Foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no Século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época e ficou conhecido no Brasil como Sistema Price.

O sistema francês ou sistema Price é o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Nesse sistema, o mutuário obriga-se a devolver o principal mais os juros em prestações iguais e periódicas, a partir do instante em que começam a ser pagas. A amortização é crescente em progressão geométrica de razão igual a $(1+i)$ e o juro é decrescente.

Suponhamos o empréstimo (PV), a ser pago em (n) prestações iguais (PMT), a uma taxa de juros (i) (expressa na mesma unidade de tempo do período dos pagamentos), pelo sistema Price. As prestações são calculadas como se fossem os termos (PMT) de uma renda imediata cujo valor presente é (PV), conforme estudamos na classificação das rendas. Assim, o valor das prestações iguais é dado pela fórmula

$$PMT = PV \times \frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}.$$

Preste atenção na resolução dos exercícios que seguem para potencializar seu conhecimento.

Exemplo 4.7. A empresa Felicidade pede emprestada R$ 100.000,00 ao banco Boa Praça, que entrega o capital no ato e sem carência. Sabendo-se que, os juros serão pagos mensalmente, a taxa de juros é de 4,5% *am* e o principal será amortizado em 10 parcelas mensais, construir a planilha do empréstimo.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 100.000{,}00$

$i = 4{,}5\%\ am = 0{,}045\ am$

$n = 10$ meses

Inicialmente, você calcula o valor das prestações, e vem

$$
\begin{aligned}
&PMT = PV \times \frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}} \\
&\Rightarrow PMT = 100.000{,}00 \times \frac{0{,}045}{1-\left(1+0{,}045\right)^{-10}} \\
&= 100.000{,}00 \times \frac{0{,}045}{1-\left(1{,}045\right)^{-10}} \\
&= 100.000{,}00 \times \frac{0{,}045}{1-0{,}64393} = \frac{4.500{,}00}{0{,}35607} \\
&= 12.637{,}88/.\,Mês.
\end{aligned}
$$

Construindo a planilha do empréstimo, você tem:

Mês	P_1	A_t	J_t	PMT
0	100.000,00			
1	91.862,12	8.137,88	4.500,00	12.637,88
2	83.358,04	8.504,08	4.133,80	12.637,88
3	74.471,27	8.886,77	3.751,11	12.637,88
4	65.184,60	9.286,67	3.351,21	12.637,88
5	55.480,03	9.704,57	2.933,31	12.637,88
6	45.338,75	10.141,28	2.496,60	12.637,88
7	34.741,11	10.597,64	2.040,24	12.637,88
8	23.666,58	11.074,53	1.563,35	12.637,88
9	12.093,66	11.572,88	1.065,00	12.637,88
10	0	12.093,66	544,22	12.637,88
Total		100.000,00	26.378,80	126.378,80

Quadro 6: Planilha do empréstimo (em R$)

Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

A planilha é autoexplicativa. A seguir mostraremos o procedimento no cálculo de diversos valores:

- O cálculo do saldo devedor de ordem *t*, $P_t = P_{t-1} - A_t$, para $t = 2$, é

$$P_2 = P_1 - A_2 = 91.862{,}12 - 8.504{,}08 = 83.358{,}04.$$

- O cálculo do juro de ordem t, $J_t = i \times P_{t-1}$, para $t = 4$, é

$$J_4 = 0{,}045 \times P_3 = 0{,}045 \times 74.471{,}27 = 3.351{,}21.$$

- O cálculo da prestação de ordem t, $PMT_t - J_t$, para $t = 5$, é

$$PMT_5 = A_5 + J_5 = 9.704{,}57 + 2.933{,}31 = 12.637{,}88.$$

- O cálculo da amortização de ordem t, $A_t = PMT_t - J_t$, para $t = 6$, é

$$A_6 = PMT_6 - J_6 = 12.637{,}88 - 2.496{,}00 = 10.141{,}28.$$

Cálculo dos Valores do Price em um Período Qualquer

No Sistema Francês ou sistema Price, muitas vezes é necessário o cálculo dos valores para algum determinado período, sem a necessidade de se elaborar a planilha. Esses cálculos podem ser feitos usando o formulário a seguir.

- Valor do saldo devedor de ordem t

$$P_t = PV \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Valor da parcela de juros de ordem t

$$J_t = PV \times i \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t+1)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Valor da primeira parcela de amortização

$$A_1 = \frac{PV \times i}{(1+i)^n - 1}.$$

- Valor da parcela de amortização de ordem t

$$A_t = \frac{PV \times i \times (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}.$$

- Soma das amortizações do 1º período até o período de ordem t

$$\sum_{K=1}^{t} A_k = PV \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1} \right].$$

- Soma dos juros acumulados do 1º período até o período de ordem t

$$\sum_{K=1}^{t} J_k = PV \times \left[\frac{i \times t \times (1+i)^n - \left[(1+i)^t - 1 \right]}{(1+i)^n - 1} \right].$$

Exemplo 4.8. Usando os valores do exemplo 4.7, calcular:

- o saldo devedor após o pagamento da sexta prestação;
- a parcela de juros da quinta prestação;
- o valor da sétima parcela de amortização;
- soma dos juros das 4 primeiras prestações; e
- a soma das 5 primeiras parcelas de amortização.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 100.000{,}00$

$i = 4{,}5\%\ am = 0{,}045\ am$

$n = 10$ meses.

- Pela fórmula $P_t = PV \times \dfrac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{1-(1+i)^{-n}}$, vem

$$P_6 = 100.000{,}00 \times \frac{1-(1+0{,}045)^{-(10-6)}}{1-(1+0{,}045)^{-10}}$$

$$\Rightarrow P_6 = 100.000{,}00 \times \frac{1-(1{,}045)^{-4}}{1-(1{,}045)^{-10}}$$

$$\Rightarrow P_6 = 100.000{,}00 \times \frac{1-0{,}8386}{1-0{,}6439} = 100.000{,}00 \times \frac{0{,}1614}{0{,}3561}$$

$$\Rightarrow P_6 = 100.000{,}00 \times 0{,}453387 = 45.338{,}75.$$

Portanto o saldo devedor após o pagamento da sexta prestação é R$ 45.338,75.

- Pela fórmula $J_t = PV \times i \times \dfrac{1-(1+i)^{-(n-t+1)}}{1-(1+i)^{-n}}$, vem

$$J_5 = 100.000,00 \times 0,045 \times \frac{1-(1+0,045)^{-(10-5+1)}}{1-(1+0,045)^{-10}}$$

$$\Rightarrow J_5 = 100.000,00 \times 0,045 \times \frac{1-(1,045)^{-6}}{1-(1,045)^{-10}}$$

$$\Rightarrow J_5 = 4.500,00 \times \frac{1-0,76790}{1-0,64393} = 4.500,00 \times \frac{0,23210}{0,35607}$$

$$\Rightarrow J_5 = 4.500,00 \times 0,65185 = 2.933,31.$$

Já a parcela de juros da quinta prestação é R$ 2.933,31.

- Pela fórmula $A_t = \dfrac{PV \times i \times (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}$, vem

$$A_7 = \frac{100.000,00 \times 0,045 \times (1+0,045)^{7-1}}{(1+0,045)^{10} - 1}$$

$$A_7 = \frac{100.000,00 \times 0,045 \times (1,045)^{6}}{(1,045)^{10} - 1}$$

$$\Rightarrow A_7 = \frac{4.500,00 \times 1,30226}{1,55297 - 1}$$

$$\Rightarrow A_7 = \frac{5.860,17}{0,55297} = 10.597,64.$$

Por sua vez o valor da sétima parcela de amortização é R$ 10.597,640

- Pela fórmula $\sum_{K=1}^{t} J_k = PV \times \left[\dfrac{i \times t \times (1+i)^n - \left[(1+i)^t - 1\right]}{(1+i)^n - 1} \right]$, vem

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,045 \times 4 \times (1+0,045)^{10} - \left[(1+0,045)^4 - 1\right]}{(1+0,045)^{10} - 1} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,045 \times 4 \times (1+0,045)^{10} - \left[(1+0,045)^4 - 1\right]}{(1+0,045)^{10} - 1} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,18 \times 1,55297 - [1,19252 - 1]}{1,55297 - 1} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000{,}00 \times \left[\frac{0{,}27953 - 0{,}19252}{0{,}155297}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000{,}00 \times 0{,}15736 = 15.736{,}12.$$

Então, a soma dos juros das quatro primeiras prestações é R$ 15.736,12.

- Finalmente pela fórmula $\sum_{K=1}^{t} A_k = PV \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1}\right]$, vem

$$\sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000{,}00 \times \left[\frac{(1+0{,}045)^5 - 1}{(1+0{,}045)^{10} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000{,}00 \times \left[\frac{(1{,}045)^5 - 1}{(1{,}045)^{10} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000{,}00 \times \frac{1{,}24618 - 1}{1{,}55297 - 1} = 100.000{,}00 \times \frac{0{,}24618}{0{,}55297}$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000{,}00 \times 0{,}44520 = 44.519{,}97.$$

Sendo a soma das cinco primeiras parcelas de amortização R$ 44.519,97.

Observação 4.3. Confira os valores encontrados com os valores da planilha do empréstimo do exemplo 4.7.

Observação 4.4. No Sistema ou Tabela Price, se a taxa de juros for ANUAL, com pagamento mensal, semestral ou trimestral, usamos a taxa PROPORCIONAL ao período de pagamento.

Exemplo 4.9. Um empréstimo no valor de R$ 7.000,00 deve ser liquidado em 18 prestações mensais, pelo sistema Price, a uma taxa de juros de 36% *aa*. Determinar o valor da prestação.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 7.000{,}00$

$n = 18$ meses

$i = 36\%\ aa = \dfrac{36\% aa}{12\, meses} = 3\%\ am = 0{,}03\ am$

$PMT = ?$

Aplicando, diretamente a fórmula $PMT = PV \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$,

você tem

$$PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-18}}$$

$$\Rightarrow PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-18}}$$

$$\Rightarrow PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-0{,}58739} = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{0{,}41261}$$

$$\Rightarrow PMT = 7.000{,}00 \times 0{,}07271 = 508{,}96.$$

Portanto, o valor da prestação é R$ 508,96.

Exemplo 4.10. O banco Alfa emprestou R$ 60.000,00 à empresa Beta, liberados no ato, nas seguintes condições:

- taxa de juros = 48% ao ano;
- empréstimo amortizado em 6 parcelas mensais pelo Sistema Price;
- IOF de 1,25% do valor financiado, pago junto com as prestações; e
- prazo de carência: 4 meses com juros capitalizados neste período e incorporados ao saldo devedor.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 60.000{,}00$

$n = 6$ meses

$i = 48\%\ aa = \dfrac{48\% aa}{12\, meses} = 4\%\ am = 0{,}04\ am$

$m = 4$ meses (juros capitalizados neste período)

Cálculo do IOF: $IOF = 1{,}25\%\ de\ 60.000{,}00 = 750{,}00$. Logo, o valor financiado será $PV = 60.000.00 + IOF = 60.750{,}00$.

Mês	P_t	A_t	J_t	PMT
0	60.750,00			
1	63.180,00			
2	65.707,20			
3	68.335,49			
4	71.068,91(*)			
5	60.354,43	10.714,48	2.842,76	13.557,24
6	49.211,37	11.143,06	2.414,18	13.557,24
7	37.622,58	11.588,79	1.968,46	13.557,24
8	25.570,24	12.052,34	1.504,90	13.557,24
9	13.035,81	12.534,43	1.022,81	13.557,24
10	0	13.035,81	521,43	13.557,24
Total		71.068,91	10.274,53	81.343,44

Quadro 7: Planilha do Empréstimo (em R$)
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

(*) O saldo devedor do mês 4 é $P_4 = 60.750{,}00 \times (1{,}04)^4 = 71.068{,}91$.

Exemplo 4.11. Um empréstimo de R$ 35.000,00 deverá ser amortizado em 48 meses, pelo sistema Price, a uma taxa de juros de 3,75 % *am* e uma carência de 12 meses (juros capitalizados na carência e incorporados ao saldo devedor). Calcular:

a) o valor da 15ª parcela de amortização das 48;
b) o valor da 25ª parcela de juros das 48; e
c) o valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem 37 das 48.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 35.000{,}00$
$n = 48$ meses
$i = 3{,}75\%\ am = 0{,}0375\ am$
$m = 12$ meses (juros capitalizados neste período)

Inicialmente, você calcula o valor do empréstimo corrigido em 3,75% *am* até o vencimento do período da carência (12 meses), assim

$$P_{12} = 35.000{,}00 \times (1{,}0375)^{12} = 54.440{,}90.$$

Este valor, R$ 54.440,90, será amortizado em 48 meses a 3,75% *am* pelo sistema Price.

Agora, respondendo, vem

a) $$A_{15} = \frac{54.440,90 \times 0,0375 \times (1 + 0,0375)^{15-1}}{(1 + 0,0375)^{48} - 1}$$

$$\Rightarrow A_{15} = \frac{2.041,53 \times (1,0375)^{14}}{5,85368 - 1}$$

$$\Rightarrow A_{15} = \frac{2.041,53 \times 1,6743}{4,85368} = \frac{3.418,14}{4,85368} = 704,23.$$

Portanto, o valor da 15ª parcela de amortização das 48 é de R$ 704,23.

b) $$J_{25} = 54.440,90 \times 0,0375 \times \frac{1-(1 + 0,0375)^{-(48-25+1)}}{1-(1 + 0,0375)^{-48}}$$

$$\Rightarrow J_{25} = 2.041,53 \times \frac{1-(1,0375)^{-24}}{1-(1,0375)^{-48}} = 2.041,53 \times \frac{10,41332}{10,17083}$$

$$\Rightarrow J_{25} = 2.041,53 \times \frac{0,58668}{0,82917} = 2.041,53 \times 0,70755 = 1.444,49.$$

Portanto, o valor da 25ª parcela de juros das 48 é R$ 1.444,49.

c) $$P_{37} = 54.440,90 \times \frac{1-(1 + 0,0375)^{-(48-37)}}{1-(1 + 0,0375)^{-48}}$$

$$\Rightarrow P_{37} = 54.440,90 \times \frac{1-(1,0375)^{-11}}{1-(1,0375)^{-48}}$$

$$\Rightarrow P_{37} = 54.440,90 \times \frac{1 - 0,66701}{1 - 0,17083}$$

$$\Rightarrow P_{37} = 54.440,90 \times \frac{0,33299}{0,82917} = 21.863,38.$$

Portanto, o valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem 37 das 48 é R$ 21.863,38.

Saiba mais ...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte algumas das referências bibliográficas:

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

SAMANEZ, Carlos Patricio. *Matemática financeira:* aplicações à análise de investimentos. 3. ed. São Paulo: Prentice HALL, 2002.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

Resumindo

Nesta Unidade você estudou os dois principais sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos utilizados nos mercados financeiro e comercial de nosso país, o SAC e o PRICE, e entendeu que os dois sistemas de amortização diferem pelo critério de devolução do principal tomado emprestado.

Você aprendeu também a elaborar a planilha do empréstimo ou o plano de amortização (com e sem carência), bem como a calcular o saldo devedor, a parcela de amortização, a parcela de juros e o valor da prestação do sistema de amortização constante e do sistema Price em um período qualquer.

Muito bem! Agora é hora de você aplicar seus conhecimentos. Faça as atividades de aprendizagem a seguir. Caso tenha dúvidas releia cuidadosamente os conceitos dados.

Atividades de aprendizagem

1. Um equipamento no valor de R$ 90.000,00 está sendo financiado pelo banco Boa Sorte para pagamento em 6 anos. A taxa de juros contratada é de 24% *aa* pelo sistema Price. O banco Boa Sorte concede ainda uma carência de 3 anos para início dos pagamentos, sendo os juros cobrados neste período. Elaborar a planilha deste financiamento.
2. Um empréstimo no valor de R$ 4.000,00 deve ser liquidado em 12 prestações mensais pela Tabela Price a uma taxa de juros de 2,45% *am*. O valor do IOF é de 1,25% do valor emprestado pago junto com as prestações e a Taxa de Abertura de Crédito (TAC) é de R$ 350,00, também paga junto com as prestações. Calcular o valor da prestação.
3. O senhor Sabe Tudo financiou R$ 95.000,0 na compra de sua casa, sendo adotado o sistema Price à taxa de 2,5% *am* para pagamento em 144 meses. Determine o estado da dívida no 87º mês, isto é, o valor do saldo devedor, valor da amortização, valor do juro e o valor da prestação.
4. O senhor Pardal comprou um carro Ok, financiando R$ 15.000,00 para pagamento em 24 prestações mensais iguais à taxa de juros de 1% *am*. Após pagar 12 prestações, resolveu liquidar a dívida. Determinar quanto o senhor Pardal pagou para liquidar a dívida na mesma taxa de juros.
5. Um empréstimo foi contratado para ser amortizado em 36 prestações mensais pelo sistema Price à taxa de juros da operação de 2,5% *am*. Sabendo-se que a valor das amortizações acumuladas até o 15º mês é R$ 18.487,28, calcular o valor do empréstimo.

5
UNIDADE

Correção Monetária

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de saber enunciar o conceito de inflação bem como o conceito de correção monetária; de calcular a inflação usando índice de preços e de determinar a inflação acumulada em determinado período; de descrever as duas formas de correção monetária utilizadas no mercado financeiro nacional; e de identificar e calcular a taxa aparente e a taxa real.

Inflação

Caro estudante,

Você já aprendeu a fazer um fluxo de caixa, a calcular juros e montante, a avaliar as melhores taxas para empréstimos ou financiamentos e qual o melhor sistema de amortização a ser utilizado. Agora você vai conhecer a inflação e a correção monetária, que afetam bastante qualquer empreendimento.

Bons estudos!

A inflação é o fenômeno conhecido como o aumento generalizado dos preços de bens e serviços, num dado período, havendo, consequentemente, a perda do poder aquisitivo da moeda, sendo a perda tanto maior quanto maiores forem esses aumentos de preços. Por deflação entende-se um processo no qual os preços caem, num dado intervalo de tempo.

Por exemplo, admitamos que a inflação num dado período é de 6%, então, a queda do poder de compra é de $\frac{0,06}{1,06} = 0,0566$ ou 5,66%. Portanto, ao final do período, podem ser consumidos 94,34% dos bens e serviços originalmente consumíveis.

Para um salário de R\$ 1.000,00, o reajuste para manter inalterado o poder de compra deve atingir 6%, passando para $1.000,00 \times 1,06 = 1.060,00$.

Se for atribuído um reajuste salarial de 7%, o salário passará a ser de R\$ 1.070,00, o que representa um reajuste adicional à inflação de R\$ 10,00, ou seja,

$$\frac{1.070,00}{1.060,00} - 1 = 0,943\%.$$

Se for atribuída uma correção de 5%, haverá uma perda real no poder aquisitivo de 1,869%, ou seja,

$$\frac{1.050,00}{1.070,00} - 1 = -\ 1,869\%.$$

Quando dizemos que a inflação mensal foi de 4%, isso não significa que todos os produtos subiram 4%, mas, sim, que a média ponderada dos aumentos foi de 4%. Assim, alguns produtos podem ter subido 3,5% e outros 5%, por exemplo.

Existem diversos fatores que causam a inflação, por exemplo:

- escassez de produtos e desequilíbrio na balança de pagamentos;
- aumento da demanda de um determinado bem, sem que haja condições efetivas de incremento proporcional da produção (inflação de demanda); e
- aumento de custo de produção, repassado aos preços, enquanto a demanda permanece inalterada (inflação de custo).

Num contexto inflacionário, devemos ficar atentos para a denominada ilusão monetária ou rendimento aparente das aplicações financeiras e investimentos. Muitas vezes uma aplicação financeira ou um investimento produzem resultados meramente ilusórios, quando o aplicador ou o investidor não leva em conta a inflação.

A seguir, veremos como se pode medir a variação de preços de um único produto durante certo período.

Índice de Preços

Um índice de preços procura medir a alteração que ocorre nos níveis de preços de um período para outro. No Brasil, a maioria dos cálculos de índices de preços está a cargo da Fundação Getúlio Vargas (FGV) do Rio de Janeiro, que publica mensalmente na revista *Conjuntura Econômica* os índices nacionais e regionais, bem como o IBGE, a Fipe e o Dieese em São Paulo, a Fundare em Recife e o Ipead – UFMG em Belo Horizonte.

O Quadro 8, a seguir, resume as características dos principais índices de preço no Brasil.

Instituto	Índice	Índices Componentes	Faixa de Renda	Área de Abrangência	Coleta	Divulgação	Início da Série
IBGE	IPCA – 15	Não há	1 a 40 SM	11 maiores Regiões Metropolitanas	Dia 16 do mês anterior ao dia 15 do mês de referência	Até o dia 25 do mês de referência	2000
	IPCA				Dia 1 º ao dia 30 do mês de referência	Até o dia 15 do mês subseqüente	1979
	INPC		1 a 8 SM				1979
FGV	IGP –10	IPA IPC INCC	1 a 33 SM no IPC, que é computado juntamente com Índices de Preços no Atacado (IPA) e na Construção Civil (INCC)	12 maiores Regiões Metropolitanas	Dia 11 do mês anterior ao dia 10 do mês de referência	Até o dia 20 do mês de referência	1994
	IGP – M	IPA IPC INCC			Dia 21 do mês anterior ao dia 20 do mês de referência 1ª Prévia dia 21 a 30 2ª Prévia dia 21 a 10	Até o dia 30 do mês de referência 1ª Prévia – até dia 10 2ª Prévia – até dia 20	1989
	IGP – DI	IPA IPC INCC			Dia 1º ao dia 30 do mês de referência	Até o dia 10 do mês subsequente	1944

Quadro 8: Características dos principais índices de preços
Fonte: IBGE (2012) e Portal Brasil (2012)

O valor da inflação é medido através de índices. Um índice geral de preços consiste em uma média ponderada de vários índices de preços que representa a medida com que os preços de um produto (ou de um conjunto de produtos) e/ou serviços variam durante um período analisado. Como dependem dos elementos escolhidos para compor este conjunto, índices diferentes fornecem valores distintos de inflação (por exemplo, área geográfica pesquisada).

Consideremos que um produto apresenta um preço P_0 na data base e tenha um preço P_t no instante t. Define-se o índice de preços desse produto entre os instantes 0 e t, indicado por I, ao número

$$I = \frac{P_t}{P_0}.$$

A variação percentual de preços (em relação à data base) é o número j', tal que

$$j' = \frac{P_t - P_0}{P_0} = I - 1.$$

Ou seja, a variação percentual de preços de um produto, em relação à época base, é o índice de preços menos 1.

Para $n + 1$ instantes de tempo: 0, t_1, t_2, ..., t_n, tem-se

$$I = \frac{P_{t_1}}{P_0} \times \frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \times \cdots \times \frac{P_{t_n}}{P_{t_{n-1}}} = \frac{P_{t_n}}{P_0}\text{, ou seja, } I = \frac{P_{t_n}}{P_0}.$$

A variação percentual de preços entre os instantes 0 e t_n, indicado por j' é dado por

$$j' = [(1 + j'_1) \times (1 + j'_2) \times \ldots \times (1 + j'_n)] - 1.$$

A média percentual no período n é dada por

$$Média = (1 + j')^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Exemplo 5.1. No início de maio de determinado ano, o preço de um produto era R$ 45,00 e no início de junho do mesmo ano era R$ 66,00. Determine:

- o índice de preços deste produto entre as duas datas; e
- a variação percentual de preços correspondente.

Resolução: Dados do problema:

Respondendo ao cálculo do índice, vem

$$I = \frac{P_t}{P_0} = \frac{46,00}{45,00} = 1,0222$$

Agora, para responder ao cálculo da variação percentual, você tem

$$j' = \frac{46,00 - 45,00}{45,00} = \frac{46,00}{45,00} - 1 = 1,0222 - 1 = 0,0222 \text{ ou } j' = 2,22\%.$$

Exemplo 5.2. No início de agosto de certo ano, o preço de um produto era R$ 15,72; no início de setembro do mesmo ano era R$ 15,97 e no início de outubro era R$ 16,15. Calcular o índice de preços no período, a variação percentual, no período, de preços deste produto e o percentual médio ou a média no período.

Resolução: Dados do problema:

$P_0 = 15{,}72$

$P_1 = 15{,}97$

$P_2 = 16{,}15$

$I = ?$

$j' = ?$

$Média = ?$

Calculando o índice de preços, você tem

$$I = \frac{P_t}{P_0} = \frac{P_2}{P_0} = \frac{16{,}15}{15{,}72} = 1{,}0274.$$

Para calcular a variação percentual de preços, vem

$$j' = \frac{16{,}15 - 15{,}72}{15{,}72} = \frac{16{,}15}{15{,}72} - 1 = 1{,}0274 - 1 = 0{,}0274 \quad ou \quad j' = 2{,}74\% .$$

Finalmente, a média no período é

$$Média = (1 + j')^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow Média = (1{,}0274)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1{,}0090 - 1 = 0{,}0090,$$

ou

$$Média = 0{,}90\%.$$

Portanto, o índice de preços no período é 1,0274; a variação percentual no período é 2,74% e o percentual médio ou média no período é 0,90%.

Exemplo 5.3. Em janeiro, fevereiro e março de determinado ano, o preço de um produto teve os seguintes aumentos, respectivamente: 2,75%, 3,15% e 3,87%. Qual o percentual acumulado de aumento no trimestre? Qual o percentual médio no período?

Resolução: Dados do problema:

$j'_1 = 2{,}75\% = 0{,}0275$

$j'_2 = 3{,}15\% = 0{,}0315$

$j'_3 = 3{,}8\% = 0{,}0387$

$j' = ?$

$Média = ?$

Aplicando a fórmula $j' = [(1 + j'_1) \times (1 + j'_2) \times \ldots \times (1 + j'_n)] - 1$, você tem

$$j' = [(1 + 0{,}0275) \times (1 + 0{,}0315) \times (1 + 0{,}0387)] - 1$$

$$= [(1{,}0275) \times (1{,}0315) \times (1{,}0387)] - 1$$

$$= [1{,}1009] - 1 = 0{,}1009$$

ou

$$j' = 10{,}09\%\ at.$$

Logo, o percentual médio será

$$Média = (1 + j')^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow Média = (1{,}1009)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1{,}0326 - 1 = 0{,}0326$$

ou

$Média = 3{,}26\%$ *at.*

Portanto, o percentual acumulado de aumento no trimestre é 10,09% e o percentual médio no período é 3,26%.

Exemplo 5.4. Determinado trimestre apresenta as seguintes taxas mensais de variação nos preços gerais da economia: 2,25%; –1,35% (deflação) e 2,55%. Calcular a taxa de inflação acumulada do trimestre.

Resolução: Dados do problema:

$j'_1 = 2{,}25\% = 0{,}0225$

$j'_2 = -1{,}35\% = -0{,}0135$

$j'_3 = 2{,}55\% = 0{,}0255$

$j' = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $j' = [(1 + j'_1) \times (1 + j'_2) \times \ldots \times (1 + j'_n)] - 1$, vem

$$j' = [(1 + 0{,}0225) \times (1 + 0{,}0135) \times (1 + 0{,}0255)] - 1$$

$$j' = [(1{,}0225) \times (-0{,}9865) \times (1{,}0255)] - 1$$

$$= [(1{,}0344) - 1 = 0{,}0344$$

ou

$$j^{1} = 3{,}44\%\ at.$$

Portanto, a taxa de inflação acumulada do trimestre é 3,44%.

Exemplo 5.5. Sendo projetada em 2,35% *am*, a taxa de inflação para os próximos 8 meses de certo ano, calcular a inflação acumulada deste período.

Resolução: Dados do problema:

$j'_1 = j'_2 = j'_3 = \ldots = j'_8 = 2{,}35\% = 0{,}0235$

$j' = ?$

Pela fórmula $j' = [(1 + j'_1) \times (1 + j'_2) \times \ldots \times (1 + j'_n)] - 1$, vem

$$j' = [(1 + j'_1) \times (1 + j'_2) \times \ldots \times (1 + j'_8)] - 1$$
$$= (1 + 0{,}0235)^8 - 1 = (1{,}0235)^8 - 1$$
$$= 1{,}2042 - 1 = 0{,}2042$$

ou

$$j' = 20{,}42\%\ ap.$$

Portanto, a inflação acumulada deste período é 20,42%.

Exemplo 5.6. Relacionaremos a seguir os valores do IPCA, referentes aos meses de maio a dezembro de determinado ano, em Reais.

MÊS	MAIO	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
IPCA	1.513,08	1.515,95	1.532,47	1.541,05	1.545,83	1.564,23	1.579,09	1.588,56

Calcular:

- a inflação do segundo semestre desse ano;
- a inflação de outubro a dezembro desse ano ou do quarto trimestre; e
- a inflação de junho a outubro desse ano.

Resolução: Para responder à inflação do 2º semestre basta você dividir o IPCA de dezembro pelo IPCA de junho (tomado como base ou referência), assim

$$Inflação\ do\ 2^o\ semestre = \frac{IPCA_{DEZ}}{IPCA_{JUN}} - 1 = \frac{1.588,56}{1.515,95} - 1 = 1,0479 - 1 = 0,0479.$$

Portanto, a inflação do segundo semestre do ano considerado, medida pela variação do IPCA, é 4,79%.

Para responder à inflação de outubro a dezembro você divide o IPCA de dezembro pelo IPCA de setembro (tomado como base ou referência), assim

$$Inflação\ do\ 4^o\ trimestre = \frac{IPCA_{DEZ}}{IPCA_{SET}} - 1 = \frac{1.588,56}{1.545,83} - 1 = 1,0276 - 1 = 0,0276.$$

Portanto, a inflação de outubro a dezembro do ano considerado, medida pela variação do IPCA, é 2,76%.

Agora, para responder à inflação de junho a outubro você vai dividir o IPCA de outubro pelo IPCA de maio (tomado como base ou referência), assim

$$Inflação\ de\ junho\ a\ outubro = \frac{IPCA_{OUT}}{IPCA_{MAI}} - 1 = \frac{1.564,23}{1.513,08} - 1 = 1,0338 - 1 = 0,0338.$$

Portanto, a inflação de junho a outubro do ano considerado, medida pela variação do IPCA, é 3,38%.

Correção Monetária (CM)

A correção monetária é um dispositivo que visa corrigir os efeitos destorcivos da inflação sobre os ativos financeiros. Foi introduzida no Brasil em outubro de 1964, com a criação das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), as quais foram extintas em fevereiro de 1986, pelo Decreto-Lei n. 2.284, quando passaram a denominar-se Obrigações do Tesouro Nacional (OTN). Atualmente, a referência de correção monetária utilizada pelo Governo é a Taxa Referencial (TR), a Taxa de Juros de Longo Prazo (TJLP), o Índice

Geral de Preços (IGP) e o Índice Nacional do Custo de Construção (INCC).

No mercado financeiro, a utilização da correção monetária, como método de corrigir os efeitos distorcivos da inflação, assumiu duas formas:

- **correção pré-fixada:** baseia-se numa taxa de inflação esperada ou antecipada para o futuro; por exemplo, operações de Crédito Direto ao Consumidor (CDC);
- **correção pós-fixada:** a correção monetária fica em aberto e os valores só serão conhecidos com o decorrer do tempo, à medida que os índices oficiais do governo forem publicados mensalmente (TR, IGP-M, TJLP, etc.). Por exemplo, financiamento de longo prazo, CDB e caderneta de poupança.

Taxa de Juros Aparente e Taxa de Juros Reais

Os efeitos inflacionários corroem uma parcela dos ganhos proporcionados pelos juros.

É necessário analisar quanto efetivamente rendeu um investimento, descontando os efeitos da inflação. A essa taxa de juros líquida atribuímos o nome de **TAXA REAL**.

A expressão **NOMINAL**, no mercado financeiro, diz respeito ao valor em unidades monetárias ou à taxa de juro escrita em um contrato qualquer (ou título de crédito). Por exemplo, se uma duplicata for emitida por R$ 10.000,00, diz-se que o seu valor nominal é de R$ 10.000,00 porque esse é o valor que está escrito no título. Analogamente, se em um título de crédito constar que o mesmo paga juros de 2% *am*, essa é a taxa nominal.

A partir do que foi colocado, podemos conceituar taxa de juros nominal e taxa de juros real, a saber:

- **Taxa nominal:** é calculada com base no valor nominal do empréstimo (ou da aplicação); e
- **Taxa real:** é calculada com base no valor efetivamente emprestado (ou aplicado), corrigido pela inflação do período (desde o dia do empréstimo até o dia de seu vencimento).

Vamos ilustrar com exemplos.

Exemplo 5.7. A empresa Alegria obtém um empréstimo de R$ 40.000,00 para ser liquidado por R$ 41.800,00 ao final de um mês. Assim, a taxa nominal mensal da operação é

$$\text{Taxa nominal} = \frac{\textit{juros}\text{ pagos}}{\textit{capital}\text{ inicial}}$$

$$= \frac{41.800{,}00 - 40.000{,}00}{40.000{,}00}$$

$$= \frac{1.800{,}00}{40.000{,}00} = 0{,}045 \quad \text{ou} \quad 4{,}5\%.$$

Exemplo 5.8. Usando os valores do exemplo 5.7 e supondo que nesse mesmo período a taxa de inflação é de 2,8%, determinar o juro real e a taxa real mensal.

Explicação: O juro real é a diferença entre o valor de resgate e o capital inicial corrigido pela inflação do período. O capital inicial corrigido é o capital inicial adicionado à correção monetária do período. Logo, no exemplo, tem-se:

- correção monetária = 2,8% × 40.000,00 = 1.120,00;
- capital inicial corrigido = 40.000,00 + 1.120,00 = 41.120,00;
- juro real = 41.800,00 – 41.120,00 = 680,00.

$$\text{Taxa real} = \frac{\textit{juro}\text{ real}}{\textit{capital}\text{ inicial corrigido}} = \frac{640{,}00}{41.120{,}00} = 0{,}0165 \ \text{ ou } 1{,}65\%.$$

Exemplo 5.9. A empresa estatal Sombra e Água Fresca mantém um fundo de pensão para os seus funcionários. Ele visa complementar a aposentadoria proporcionada pelo sistema governamental, normalmente abaixo do nível salarial do funcionário no momento em que encerra as atividades profissionais. Os funcionários contribuem com 3,5% de seus rendimentos. E a empresa com um valor semelhante. O total do valor auferido é aplicado em diversas modalidades de investimentos, desde contas de poupanças até fundos de investimentos em ações. No último ano, o fundo de pensão rendeu cerca de 18,45%, enquanto a inflação no período ficou em 9,43%. Calcular a taxa real de crescimento do patrimônio do fundo de pensão da Sombra e Água Fresca.

Resolução: Suponhamos que fossem aplicados R$ 100,00 no início do ano anterior (*PV*). Ao final do ano o (*FV*) será de R$ 118,45. No entanto, os mesmos R$ 100,00 correspondem, ao final do ano, a R$ 109,43, em função da ação da inflação. Para determinar o ganho percentual, basta dividir R$ 118,45 por R$ 109,43, cujo o resultado é 1,0824, ou seja, a taxa real foi de 8,24% ao ano.

Concluímos que o crescimento efetivo do patrimônio do fundo de pensão foi de 8,24% *aa*. O restante acrescido ao capital foi consumido pela inflação.

Conforme visto podemos afirmar que a taxa aparente é aquela que obtemos sem que seja levada em consideração a inflação do período, e a taxa real é a obtida depois que se exclui a inflação do período.

As taxas aparente e real relacionam-se da seguinte forma:

$$1 + i = (1 + r) \times (1 + j)$$

onde

i = taxa aparente ou rentabilidade aparente;

r = taxa real ou rentabilidade real;

j = taxa de inflação.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 5.10. Um capital foi aplicado, por um ano, à taxa de juros de 10,56% *aa*. Se a inflação no mesmo período foi de 9,47%, determine a taxa real anual da operação.

Resolução: Dados do problema:

i = 10,56% *aa* = 0,1056 *aa*

j = 9,47% *aa* = 0,0947 *aa*

r = ? (*anual*);

Pela fórmula $1 + i = (1 + r) \times (1 + j)$, vem

$$1+r=\frac{1+i}{1+j}\;\Rightarrow\;1+r=\frac{1+0{,}1056}{1+0{,}0947}=\frac{1{,}1056}{1{,}0947}=1{,}00996$$

$$\Rightarrow\;1+r=1{,}00996$$

$$\Rightarrow r=1{,}00996-1=0{,}00996$$

ou

r = 0,996% *aa*.

Portanto, a taxa real anual da operação é 0,996%.

Exemplo 5.11. Uma aplicação (PV) de R$ 1.200,00 teve um rendimento aparente (JA) de R$ 110,00. Se a inflação do período foi de 7,5%, determinar a rentabilidade aparente e a rentabilidade real da operação. Determine também o rendimento real (JR) da operação.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 1.200{,}00$

$JA = 110{,}00$

j = 7,5% *ap* = 0,075 *ap*

i = ?

r = ?

JR = ?

Pela definição de taxa de juros que você aprendeu na Unidade 1, $i=\frac{JA}{PV}$, vem

$$i=\frac{JA}{PV}=\frac{110{,}00}{1.200{,}00}=0{,}09167$$

ou

i = 9,16% *ap*.

Para calcular a taxa de rentabilidade real, você tem a fórmula

$$1+r=\frac{1+i}{1+j}\Rightarrow 1+r=\frac{1+0{,}09167}{1+0{,}075}=\frac{1{,}09167}{1{,}075}=1{,}0155$$

$$\Rightarrow\;1+r=1{,}0155$$

$$\Rightarrow r=1{,}0155-1=0{,}0155,$$

ou r = 1,55% *ap*.

Agora, para determinar o rendimento real da operação, vem Juro real (JR) = Juro Aparente (JA) – Correção Monetária (CM), onde

$$CM = PV \times j$$

ou ainda,

$$JR = JA - PV \times j.$$

Logo, o valor do rendimento real da operação será

$$JR = JA - PV \times j \Rightarrow JR = 110{,}00 - 1.200{,}00 \times 0{,}075$$
$$= 110{,}00 - 90{,}00 = 20{,}00.$$

Outro procedimento para você calcular a taxa de rentabilidade real, conhecendo o valor do rendimento real, da operação é

$$r = \frac{Juro\ real}{capital\ inicial\ corrigido} = \frac{JR}{PV + PV \times j} = \frac{JR}{PV \times (1 + j)}$$

ou

$$r = \frac{JR}{PV \times (1 + j\ )}.$$

Calculando o valor da taxa de rentabilidade do exemplo anterior pela "nova" fórmula você tem

$$r = \frac{JR}{PV \times (1 + j\ )}$$
$$\Rightarrow r = \frac{20{,}00}{1.200{,}00 \times (1 + \ 0{,}075)}$$
$$\Rightarrow r = \frac{20{,}00}{1.200{,}00 \times 1{,}075}$$
$$\Rightarrow r = \frac{20{,}00}{1.290{,}00} = 0{,}0155.$$

Portanto, a taxa de rentabilidade aparente é 9,167% *ap*, a taxa de rentabilidade real é 1,55% *ap* e o rendimento real ou juro real da operação é R$ 20,00.

Exemplo 5.12. Uma aplicação teve um rendimento aparente de R$ 420,00. Se no período de aplicação a inflação foi de 8,75% e a taxa de juros real foi de 1,47%, determinar:

- o capital aplicado;
- a correção monetária ou atualização monetária; e
- o juro ou rendimento real.

Resolução: Dados do problema:

$JA = 420{,}00$

$j = 8{,}75\%\ ap = 0{,}0875\ ap$

$r = 1{,}47\%\ ap = 0{,}0147\ ap$

$PV = ?$

$CM = ?$

$JR = ?$

Inicialmente, você determina a taxa aparente da aplicação pela fórmula $1 + i = (1 + r) \times (1 + j)$, assim

$$1 + i = (1 + 0{,}0875) \times (1 + 0{,}0147)$$
$$\Rightarrow 1 + i = 1{,}0875 \times 1{,}0147 = 1{,}1165$$
$$\Rightarrow 1 + i = 1{,}1035$$

ou

$$i = 1{,}1035 - 1 = 0{,}1035$$
$$\Rightarrow i = 10{,}35\%\ ap.$$

Para calcular o capital aplicado, você usa a fórmula $i = \dfrac{JA}{PV}$ e tem

$$0{,}1035 = \frac{420{,}00}{PV}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{420{,}00}{0{,}1035} = 4.057{,}97.$$

Agora, para determinar a correção monetária, pela fórmula $CM = PV \times j$, vem

$$CM = 4.057{,}97 \times 0{,}0875 = 355{,}07.$$

Finalmente, para calcular o juro real, pela fórmula $JR = JA - CM$

$$JR = 420{,}00 - 355{,}07 = 64{,}93.$$

Portanto, o capital aplicado é R$ 4.057,97; a correção monetária é R$ 355,07 e o juro real é R$ 64,93.

Exemplo 5.13. O Sr. Juca Feliz aplicou a quantia de R$ 2.700,00 durante 21 meses à taxa real de juros de 0,68% *am*. Se neste período a inflação foi de 27,46%, determinar o valor de resgate.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 2.700,00$

$j = 27,43\%\ ap = 0,2746\ ap$

$r = 0,68\%\ am = 0,0068\ am$

$n = 21\ meses$

$FV = ?$

O valor de resgate é o montante que você estudou na Unidade 2, dado por $FV = PV \times (1 + i)^n$, onde i é taxa aparente.

Assim, o valor de resgate será $FV = 2.700,00 \times (1 + i)^{21}$.

Para calcular a taxa aparente, você utiliza a fórmula $1 + i = (1 + r) \times (1 + j)$ e para isso basta calcular a taxa de inflação mensal equivalente à taxa de inflação do período, usando a fórmula de taxa equivalente estudada na Unidade 2, $i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$, logo

$$j_{eq} = (1+j)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = \left(1+0,2746\right)^{\frac{1}{21}} - 1 = \left(1,2746\right)^{\frac{1}{21}} - 1 =$$

$1,0116 - 1 = 0,0116$, ou $j = 1,16\%\ am = 0,016\ am$. Então,

$1 + i = (1 + r) \times (1 + j) \Rightarrow 1 + i = (1 + 0,0068) \times (1 + 0,0116) =$

$1 + i = (1,0068) \times (1,0116) = (1,0068) \times (1,0116) = 1,0185 \Rightarrow$

$i = 0,0185$, ou ainda, $i = 1,85\%\ am$.

Agora, você vai à fórmula $FV = 2.700,00 \times (1+i)^{21}$ e substitui i e tem

$$FV = 2.700,00 \times (1+i)^{21} = 2.700,00 \times (1+0,0185)^{21} =$$

$$FV = 2.700,00 \times 1,4695 = 3.967,76.$$

Portanto, o valor de resgate é R$ 3.967,76.

UNIDADE 5

Exemplo 5.14. Uma pessoa fez um investimento de R$ 2.100,00 e resgatou nove meses depois a importância de R$ 2.498,64. Determinar a taxa de rentabilidade real mensal sabendo que a inflação do período foi de 10,5%.

Resolução: Dados do problema:

$PV = 2.100{,}00$

$j = 10{,}5\%\ ap = 0{,}105\ ap$

$n = 9$ meses

$FV = 2.498{,}64$

$r = ?$ (mensal)

Aplicando a fórmula $FV = PV \times (1+i)^n$, você calcula a taxa aparente mensal, assim

$$2.498{,}64 = 2.1000{,}00 \times \left(1+i\right)^9$$
$$\Rightarrow \frac{2.498{,}64}{2.100{,}00} = \left(1+i\right)^9$$
$$\Rightarrow \left(1+i\right)^9 = 1{,}1898$$
$$\Rightarrow \left[\left(1+i\right)^9\right]^{\frac{1}{9}} = \left(1{,}1898\right)^{\frac{1}{9}}$$
$$\Rightarrow (1+i) = 1{,}0195$$
$$\Rightarrow i = 1{,}0195 - 1 = 0{,}0195$$

ou seja,

$$i = 1{,}95\%\ am.$$

Como a taxa de inflação do período foi de 10,5%, você determina a taxa de inflação equivalente mensal aplicando a fórmula da taxa equivalente $i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$, logo

$$j_{eq} = (1+j)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$
$$\Rightarrow j_{eq} = (1+0{,}105)^{\frac{1}{9}} - 1$$
$$\Rightarrow j_{eq} = (1{,}105)^{\frac{1}{9}} - 1 = 1{,}0112 - 1 = 0{,}0112$$
$$\Rightarrow j_{eq} = 0{,}0112, \quad \text{ou} \quad j_{eq} = 1{,}12\ \%\ am.$$

Você já tem a taxa aparente mensal, $i = 1{,}95\%\ am,$ e a taxa de inflação mensal equivalente, $j_{eq} = 1{,}12\%\ am,$ agora, para calcular a taxa de rentabilidade real mensal use a fórmula

$$1+r=\frac{1+i}{1+j}$$

$$\Rightarrow 1+r=\frac{1+0{,}0195}{1+0{,}0112}$$

$$\Rightarrow 1+r=\frac{1{,}0195}{1{,}0112}=1{,}0082$$

$$\Rightarrow r = 1{,}0082 - 1 = 0{,}0082, \quad \text{ou} \quad r = 0{,}82\%\ am$$

Portanto, a taxa de rentabilidade real é $r = 0{,}82\%$ *am*.

Saiba mais ...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte as referências citadas a seguir:

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática financeira*. 2. ed. São Paulo: Atlas,1991.

Resumindo

Nesta Unidade você aprendeu como calcular a inflação aplicando os principais índices de preços praticados no Brasil. Você aprendeu também a calcular a atualização monetária (ou correção monetária) e determinar a taxa real e a taxa aparente de uma operação financeira.

E então, até aqui você está entendendo tudo e acompanhando o raciocínio? Vamos fazer as atividades propostas? Caso tenha dúvidas, retorne ao texto e releia os pontos em que o entendimento não foi completo.

Atividades de aprendizagem

1. No primeiro mês de determinado ano a taxa de inflação foi de 1,17%, no segundo mês foi de 1,56% e no terceiro de 1,78%. De quanto foi a inflação acumulada no trimestre? Calcular a inflação média do trimestre.
2. Calcular a variação real do poder aquisitivo de um assalariado que obtém, em determinado semestre, um reajuste salarial de 5,5%, admitindo que a inflação do período tenha atingido:
   a) 4%;
   b) 5,5%; e
   c) 7%.
3. Qual o custo real mensal de uma operação de financiamento por 7 meses, sabendo que a taxa de juros aparente é de 2,5% ao mês e a inflação de todo o período é 8,5%?
4. Um investidor adquiriu um título por R$ 4.200,00 e resgatou 168 dias após por R$ 4.650,00. Sabendo que a correção monetária deste período atingiu 5%, determine a rentabilidade real mensal do investidor.
5. A empresa Alegria contraiu um financiamento de capital de giro no valor de R$ 180.000,00 no Banco Sorriso, a uma taxa de juros de 5,75% *am* para pagamento único ao final de 150 dias. Sabendo-se que a variação da TR no período foi de 5,25% e o IOF é de 1,25% sobre o valor do financiamento, cobrado no ato, calcular:
   a) o valor do IOF;
   b) o valor líquido liberado pelo banco; e
   c) o montante a ser pago.
6. Uma pessoa pede emprestados R$ 2.700,00, comprometendo-se a restituir R$ 2.950,00 após 18 meses. Calcular a taxa anual de juros real, se a inflação for de 5% *aa*.

7. Um carro é vendido por R$ 25.000,00 à vista ou em 24 prestações mensais iguais e sucessivas, vencendo, a primeira, daqui a um mês. Determine a taxa aparente mensal e o valor das prestações, se a taxa de juros real for de 6,5% *aa* e a inflação de 16,5% *aa*.
8. Em quatro meses consecutivos, o preço de um produto aumentou 1,5%, 2,3%, 1,75% e 3,01%. Qual a taxa acumulada de inflação no período?
9. Um investidor abriu uma caderneta de poupança com R$ 8.000,00. Determinar o montante quatro meses depois, sabendo-se que as taxas mensais de correção monetária, dadas pela TR, foram de 0,98%, 1,2%, 1,05% e 1,25%, e dado que a rentabilidade real é 0,5% *am*.
10. Uma pessoa abriu uma caderneta de poupança com R$ 6.000,00. Um mês depois efetuou um saque de R$ 2.000,00. Determinar seu montante três meses após a aplicação, sabendo que a taxa de correção monetária (TR) no primeiro mês foi de 0,87%, no segundo mês 1,2% e no terceiro mês 1,45%.

6 Unidade

Noções de Análise de Investimentos

Objetivo

Ao final desta Unidade você deverá ser capaz de descrever e de aplicar os mais importantes métodos de avaliação de projetos de investimentos, de identificar e calcular o valor presente líquido de um fluxo de caixa de um projeto de investimento, de interpretar e calcular a taxa interna de retorno de um projeto e de analisar um projeto de investimento pelo método do custo anual uniforme equivalente.

Conceitos

Caro estudante,

Ao elaboramos um projeto de investimento saímos em busca de investidores ou mesmo de financiadores para realizá-lo, mas em muitas situações não conseguimos o apoio necessário a sua concretização. Isso, na maioria das vezes, acontece porque o fluxo de caixa não está condizente com as etapas do projeto ou a taxa de retorno não considera a inflação; e assim sucessivamente.

Agora, você vai ter noções de análise de investimentos que permitirão analisar e avaliar projetos de investimentos possibilitando assim uma base para sua própria elaboração de projetos.

Bons estudos e sucesso!

O conceito de análise de investimentos pode ser entendido como sendo um conjunto de técnicas avançadas, utilizando Estatística, Matemática Financeira e Informática, que permite a comparação entre os resultados de tomadas de decisão referentes a alternativas diferentes buscando uma solução eficiente para uma decisão compensadora.

De um modo geral, chamamos de investimento toda aplicação de dinheiro visando ganhos. A aplicação pode ser tanto no mercado financeiro (caderneta de poupança, fundos e ações) como em unidades produtivas de empresas em geral.

Quando da realização de um determinado investimento, levantamos várias alternativas para sua execução final.

Ao conjunto de determinados métodos utilizados para otimizar as alternativas propostas denominamos Análise de Investimento.

Um estudo de Análise de Investimento compreende:

- um investimento a ser realizado; por exemplo:
  - substituição de um equipamento por outro;

- construção de uma nova fábrica;
- lançamento de um novo produto; ou
- atendimento a novos padrões de qualidade;

- enumeração das alternativas tecnicamente viáveis;
- análise de cada alternativa;
- comparação de cada alternativa; e
- escolha da melhor alternativa.

A decisão da implantação de um projeto deve considerar:

- critérios econômicos: rentabilidade do investimento;
- critérios financeiros: disponibilidade de recursos; e
- critérios imponderáveis: fatores não conversíveis em dinheiro (boa vontade de um fornecedor, boa imagem da empresa, etc.).

Isso nos motiva as seguintes definições.

- **Taxa Mínima de Atratividade (TMA):** É a taxa de juros mínima porque convém o investidor optar em determinado projeto de investimento. Por exemplo,
  - Pessoa Física: taxa de juros da caderneta de poupança.
  - Pessoa Jurídica: taxa de juros dos bancos comerciais; taxa de juros dos bancos de investimentos; valorização dos títulos públicos; rentabilidade da empresa.
- **Vida útil de um investimento** (n). A **Vida Útil** de um investimento pode ser considerada como a diferença entre a data final do retorno do capital e a data inicial do investimento.

A maioria das alternativas dos problemas de análise de investimentos envolve receitas e despesas que representaremos através do diagrama do fluxo de caixa estudado na Unidade 1, lembra?

Na realização de um projeto de investimento devemos considerar os fatores de decisão ou os principais fatores econômicos que nos auxiliam na escolha da melhor alternativa de investimento, que são os seguintes:

- receitas operacionais;
- despesas operacionais e de investimento;
- custo inicial (valor do investimento) e valor residual;
- taxa mínima de atratividade (TMA);
- vida útil do investimento e depreciação; e
- imposto de renda do investidor.

Métodos de Avaliação de Projetos de Investimento

Para auxiliar a tomada de decisão foram desenvolvidos métodos de comparação entre alternativas envolvendo desembolsos financeiros. Esses métodos consideram o custo de posse do dinheiro para nós e procuram identificar qual a melhor maneira de emprega-lo.

Os métodos não conseguem eliminar os riscos dos fatores imponderáveis, como eventuais ações governamentais, que podem, durante o tempo de desenvolvimento do nosso projeto, modificar a conjuntura econômica, alterando os resultados que havíamos previsto. Tais métodos, contudo, nos permitem perceber quais resultados esperar para cada uma das opções de que dispomos e selecionar aquela mais favorável.

Desde que sejam tomados os devidos cuidados, os métodos de avaliação de projetos de investimentos darão os mesmos resultados.

Existem métodos denominados determinísticos e probabilísticos. Abordaremos os dois principais métodos determinísticos de avaliação de projetos de investimento:

- Método do Valor Presente Líquido (*VPL*).
- Método da Taxa Interna de Retorno (*TIR*).

Vamos estudar inicialmente o VPL.

6 UNIDADE

Método do Valor Presente Líquido (VPL)

O método consiste em determinar o valor presente de todas as alternativas disponíveis e, a partir destes valores, empregando a taxa mínima de atratividade (TMA), selecionar a mais favorável. Ou seja, consiste na comparação de todas as entradas e saídas de dinheiro de um fluxo de caixa na data 0 (data de hoje).

Critério de decisão do *VPL*

- Se $VPL > 0$, então haverá um ganho adicional ou lucro extra gerado pelo projeto (expresso em valores de hoje) em relação ao mesmo investimento aplicado à taxa de desconto, isto é, **o investimento será atrativo.**
- Se $VPL < 0$, então terá uma perda (expressa em valores de hoje) **e o investimento não será atrativo.**

A equação do VPL é

$$VPL = \frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{CF_j}{(1+i)^j} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+i)^n} - CF_0$$

onde

CF_j = valor fluxo de caixa de ordem j

i = taxa mínima de atratividade (TMA) ou custo de capital

CF_0 = valor do fluxo de caixa inicial (data 0).

● **Observação:** Se $CF_1 = CF_2 = \ldots = CF_n = CF$, a equação do VPL será

$$VPL = CF \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - CF_0.$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 6.1 A empresa "Sempre Alerta" está interessada em investir R$ 600.000,00 num projeto cujo fluxo de caixa depois dos impostos está registrado na figura a seguir (em R$ 1.000,00). Aplicando o método do *VPL*, verificar se este projeto deve ser aceito, considerando a TMA = 12% *aa*.

Anos	0	1	2	3	4	5	6	7
Capitais (R$)	600	120	150	200	220	150	180	80

Quadro 9: Fluxo de caixa da empresa Sempre Alerta
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: Para calcular o VPL do fluxo de caixa do projeto, você aplica a equação dada anteriormente, conforme segue.

$$VPL = \frac{120.000,00}{1+0,12} + \frac{150.000,00}{(1+0,12)^2} + \frac{200.000,00}{(1+0,12)^3} + \frac{220.000,00}{(1+0,12)^4} + \frac{150.000,00}{(1+0,12)^5} + \frac{180.000,00}{(1+0,12)^6} + \frac{80.000,00}{(1+0,12)^7} - 600.000,00$$

$$\Rightarrow VPL = \frac{120.000,00}{1,12} + \frac{150.000,00}{(1,12)^2} + \frac{200.000,00}{(1,12)^3} + \frac{220.000,00}{(1,12)^4} + \frac{150.000,00}{(1,12)^5} + \frac{180.000,00}{(1,12)^6} + \frac{80.000,00}{(1,12)^7} - 600.000,00$$

$$\Rightarrow VPL = \frac{120.000,00}{1,1200} + \frac{150.000,00}{1,2544} + \frac{200.000,00}{1,4049} + \frac{220.000,00}{1,5735} + \frac{150.000,00}{1,7623} + \frac{180.000,00}{1,9738} + \frac{80.000,00}{2,2107} - 600.000,00$$

$$\Rightarrow VPL = 107.142,86 + 119.579,08 + 142.356,05 + 139.813,98 + 85.114,03 + 91.193,60 + 36.187,93 - 600.000,00$$

$$\Rightarrow VPL = 721.387,53 - 600.000 = 121.387,53.$$

Observamos que o VPL é maior que zero. Portanto, o projeto deve ser aceito.

Para resolver o exemplo anterior na HP12-C, você utiliza a função *NPV* e digita:

f REG

600000 CHS g CF_0

120000 g CF_j

150000 g CF_j

200000 g CF_j

150000 g CF_j

180000 g CF_j

80000 g CF_j

12 i

f NPV e aparece no visor 121.387,53.

- **Observação:** Para compreender o significado do VPL, analisemos o VPL do fluxo de caixa do exemplo anterior considerando outros valores de taxa de juros (TMA) como mostra a figura a seguir denominada PERFIL do VPL.

Taxa de Juros (anual)	VPL (R$)
0%	500.00,00
5%	312.804,00
10%	169.380,00
15%	57.529,00
20%	(31.107,00)
25%	(102.373,00)
30%	(160.433,00)

Quadro 10: Perfil do VPL
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Se a TMA for igual a 15% *aa* em vez de 12% *aa*, o VPL será R$ 57.529,00. Comparando com o resultado da taxa de juros de 12% *aa*, o lucro extra gerado pelo projeto será menor, pois a remuneração do capital aumentou.

Se a TMA for igual a 20% *aa*, o VPL do projeto será negativo (R$ 31.107,00). Este valor negativo indica que:

- Aceitando este projeto com a taxa de juros de 20% *aa* a empresa terá prejuízo.
- O projeto de investimento destruirá a empresa.

Exemplo 6.2. A empresa Progresso deve investir R$ 250.000,00 em um projeto de ampliação da capacidade produtiva para obter benefícios das entradas de caixa de R$ 60.000,00 por ano, após os impostos, durante os próximos seis anos. Considere que todos estes valores estejam sem a influência de aumento pela inflação, que sejam recebidos com certeza, e que a taxa mínima de atratividade (TMA) seja de 12% *aa*, o projeto deve ou não ser aceito, pelo método do VPL?

Resolução: O fluxo de caixa do projeto está no Quadro 11 (em R$ 1.000,00).

ANOS	0	1	2	3	4	5	6
CAPITAIS (R$)	(250)	60	60	60	60	60	60

Quadro 11: Fluxo de caixa da empresa Progresso
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Para calcular o VPL do projeto, aplicando a fórmula

$$VPL = CF \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - CF_0$$

vem

$$\begin{aligned} VPL &= 60.000,00 \times \frac{1-(1+0,12)^{-6}}{0,12} - 250.000,00 \\ &= 60.000,00 \times \frac{1-(1,12)^{-6}}{0,12} - 250.000,00 \\ &= 60.000,00 \times \frac{1-0,50663}{0,12} - 250.000,00 \\ &= 60.000,00 \times \frac{0,49337}{0,12} - 250.000,00 \\ &= 246.684,44 - 250.000,00 \\ &= -3.315,56. \end{aligned}$$

Portanto, como VPL < 0, o projeto não deve ser aceito pela empresa Progresso.

Exemplo 6.3. Um comitê desportivo oferece, durante cinco meses, os pontos comerciais A e B, por um aluguel de R$ 25.000,00 e R$ 20.000,00, respectivamente, pagos antecipadamentee. Estimamos que a renda líquida ao final de cada mês será de R$ 7.000,00 e R$ 6.000,00, respectivamente. Pelo método do VPL, qual o ponto comercial que deve ser escolhido, considerando uma taxa de atratividade de 2% *am*?

Resolução: O fluxo de caixa dos pontos comerciais está no Quadro 12.

	Ponto A	Ponto B
Custo inicial	R$25.000,00	R$20.000,00
Vida útil	5 meses	5 meses
Receita mensal	R$7.000,00	R$6.000,00

Quadro 12: Fluxo de caixa dos pontos comerciais A e B
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Agora, aplicando a equação do VPL,

$$VPL = CF \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - CF_0$$

para o ponto comercial A, $TMA = 2\%\ am = 0{,}02\ am$; $n = 5\ meses$, você tem

$$\begin{aligned} VPL &= 7.000{,}00 \times \frac{1-(1+0{,}02)^{-5}}{0{,}02} - 25.000{,}00 \\ &= 7.000{,}00 \times \frac{1-(1{,}02)^{-5}}{0{,}02} - 25.000{,}00 \\ &= 7.000{,}00 \times \frac{1-0{,}90573}{0{,}02} - 25.000{,}00 \\ &= 7.000{,}00 \times \frac{0{,}09427}{0{,}02} - 25.000{,}00 \\ &= 7.000{,}00 \times 4{,}71346 - 25.000{,}00 \\ &= 32.994{,}22 - 25.000{,}00 \\ &= 7.994{,}22. \end{aligned}$$

Logo, o *VPL* do ponto comercial A é R$ 7.994,22.

Para o ponto comercial B, aplicando a equação do *VPL*

$$VPL = CF \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - CF_0$$

$TMA = 2\%\ am = 0{,}02\ am\ ;\ n = 5\ meses$, você tem

$$\begin{aligned}
VPL &= 6.000{,}00 \times \frac{1-(1+0{,}02)^{-5}}{0{,}02} - 20.000{,}00 \\
&= 6.000{,}00 \times \frac{1-(1{,}02)^{-5}}{0{,}02} - 20.000{,}00 \\
&= 6.000{,}00 \times \frac{1-0{,}90573}{0{,}02} - 20.000{,}00 \\
&= 6.000{,}00 \times \frac{0{,}09427}{0{,}02} - 20.000{,}00 \\
&= 6.000{,}00 \times 4{,}71346 - 20.000{,}00 \\
&= 28.280{,}76 - 20.000{,}00 \\
&= 8.280{,}76.
\end{aligned}$$

Logo, o VPL do ponto comercial B é R$ 8.280,76.

Portanto, como o VPL do ponto comercial B é maior que o VPL do ponto comercial A, o ponto comercial B deve ser o escolhido.

Exemplo 6.4. Dois equipamentos são examinados, conforme dados obtidos nos fluxos de caixa apresentados na figura a seguir. Considerando-se a Taxa Mínima de Atratividade de 15% *aa*, determine o equipamento que deve ser escolhido.

	Equipamento A	Equipamento B
Custo de aquisição	R$ 80.000,00	R$ 120.000,00
Custo anual de manutenção	R$ 25.000,00	R$ 20.000,00
Valor residual para venda	R$ 8.000,00	R$ 12.000,00
Vida útil (em anos)	10	10

Quadro 13: Fluxo de caixa dos equipamentos A e B
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: Aqui, você observa que temos dez saídas de caixa anuais (custo) de R$ 25.000,00 e uma receita de R$ 8.000,00 no ano 10, para o Equipamento A, *TMA* = 15% *aa* = 0,15 *aa*. Calculando diretamente o VPL, vem

$$VPL = -20.000,00 \times \frac{1-(1+0,15)^{-10}}{0,15} + \frac{12.000,00}{(1+0,15)^{10}} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{1-(1,15)^{-10}}{0,15} + \frac{12.000,00}{(1,15)^{10}} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{1-\ 0,24718}{0,15} + \frac{12.000,00}{4,04556} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{0,75282}{0,15} + \frac{12.000,00}{4,04556} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times\ 5,01877 + 2.966,22 - 120.000,00$$

$$=\ 100.375,37 + 2.996,22 - 120.000,00$$

$$= -\ 217.409,16.$$

Agora, para o Equipamento B, você observa que temos dez saídas de caixa anuais (custo) de R$ 25.000,00 e uma receita de R$ 12.000,00 no ano 10, *TMA* = 15% *aa* = 0,15 *aa*. Calculando diretamente o *VPL*, vem

$$VPL = -20.000,00 \times \frac{1-(1+0,15)^{-10}}{0,15} + \frac{12.000,00}{(1+0,15)^{10}} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{1-(1,15)^{-10}}{0,15} + \frac{12.000,00}{(1,15)^{10}} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{1-\ 0,24718}{0,15} + \frac{12.000,00}{4,04556} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times \frac{0,75282}{0,15} + \frac{12.000,00}{4,04556} - 120.000,00$$

$$= -20.000,00 \times\ 5,01877 + 2.966,22 - 120.000,00$$

$$=\ 100.375,37 + 2.996,22 - 120.000,00$$

$$= -\ 217.409,16.$$

A alternativa A equivale a um equipamento em que se investe R$ 203.491,74 enquanto o equipamento B equivale a um investimento de R$ 217.409,16.

Entre estes dois, é preferível o equipamento A, pois o investimento é menor.

Por outro lado, temos

$$VPL_A > VPL_B, \; pois - 203.491{,}74 > - 217.409{,}16.$$

Portanto, o Equipamento A deve ser o escolhido.

Exemplo 6.5. Duas máquinas estão sendo analisadas para um investimento a uma Taxa Mínima de Atratividade de 12% *aa*. Determinar qual máquina a ser escolhida. Os seguintes dados foram obtidos, conforme mostra o Quadro 14:

	Máquina A	Máquina B
Custo inicial	R$45.000,00	R$55.000,00
Custo operacional anual	R$6.000,00	R$9.000,00
Valor residual	R$2.500,00	R$3.00,00
Vida útil	8 anos	12 anos
Receita anual	R$24.000,00	R$24.000,00

Quadro 14: Fluxo de caixa das máquinas A e B
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: Para a Máquina A, você tem durante sete anos as receitas líquidas anuais iguais a 24.000,00 – 6.000,00 = 18.000,00 e no 8º ano a receita líquida será 24.000,00 – 6.000,00 + 2.500,00 = 20.500,00. O fluxo de caixa da Máquina A é mostrado no Quadro 15.

Anos	0	1 a 7	8
Capitais (R$)	(45.000,00)	18.000,00	20.500

Quadro 15: Fluxo de caixa da máquina A
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Agora, aplicando a equação do VPL para a Máquina A, $TMA = 12\%\ aa = 0{,}12\ aa$; $n = 8\ anos$, você tem

$$VPL = 18.000{,}00 \times \frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} + \frac{20.500{,}00}{(1+0{,}12)^{8}} - 45.000{,}00$$

$$= 18.000{,}00 \times \frac{1-(1{,}12)^{-7}}{0{,}12} + \frac{20.500{,}00}{(1{,}12)^{8}} - 45.000{,}00$$

$$= 18.000{,}00 \times \frac{1-0{,}45235}{0{,}12} + \frac{20.500{,}00}{2{,}47596} - 45.000{,}00$$

$$= 18.000{,}00 \times \frac{0{,}54765}{0{,}12} + \frac{20.500{,}00}{2{,}47596} - 45.000{,}00$$

$$= 18.000{,}00 \times 4{,}56376 + 8.279{,}61 - 45.000{,}00$$

$$= 82.147{,}62 + 8.279{,}61 - 45.000{,}00$$

$$= 45.427{,}23$$

Logo, o VPL da máquina A é R$ 45.427,23.

Para a Máquina B, você tem durante onze anos as receitas líquidas anuais iguais a 24.000,00 – 9.000,00 = 15.000,00 e no 12° ano a receita líquida será 24.000,00 – 9.000,00 + 3.000,00 = 18.000,00. O fluxo de caixa da Máquina B é mostrado no Quadro 16.

ANOS	0	1 a 11	12
CAPITAIS (R$)	(55.000,00)	15.000,00	18.000,00

Quadro 16: Fluxo de caixa da máquina B
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Aplicando a equação do VPL para a Máquina B, $TMA = 12\%\ aa = 0{,}12aa;\ n = 12\ anos,$ você tem

$$VPL = 15.000{,}00 \times \frac{1-(1+0{,}12)^{-11}}{0{,}12} + \frac{18.000{,}00}{(1+0{,}12)^{12}} - 55.000{,}00$$

$$= 15.000{,}00 \times \frac{1-(1{,}12)^{-11}}{0{,}12} + \frac{18.000{,}00}{(1{,}12)^{12}} - 55.000{,}00$$

$$= 15.000{,}00 \times \frac{1-0{,}28748}{0{,}12} + \frac{18.000{,}00}{3{,}89598} - 55.000{,}00$$

$$= 15.000,00 \times \frac{0,71252}{0,12} + \frac{18.000,00}{3,89598} - 55.000,00$$

$$= 15.000,00 \times 5,93770 + 4.620,15 - 55.000,00$$

$$= 89.065,49 + 4.620,15 - 55.000,00$$

$$= 38.685,64.$$

Logo, o VPL da máquina B é R$ 38.685,64.

Assim, o *VPL* da máquina A é R$ 45.427,23 e o *VPL* da máquina B é R$ 38.685,64.

Portanto, a máquina a ser a escolhida é a A.

Para verificar se você está acompanhando tudo até aqui, Faça as atividades propostas a seguir, e caso tenha dúvidas releia o conteúdo.

Atividades de aprendizagem

1. Determine o Valor presente Líquido (VPL) dos seguintes fluxos de caixa (em R$1.000,00):

- TMA = 15% *aa*

Anos	0	1	2	3	4
Capitais	(200)	160	80	40	20

- TMA=11% *aa*

Anos	0	1	2	3	4
Capitais	(250)	80	80	80	80

2. A empresa Sucata Ltda. investe R$ 370.000,00 na reforma de suas instalações. As receitas projetadas desse investimento para os próximos sete anos estão de acordo com o quadro que segue (em R$ 1.000,00). Verificar se esse investimento é atrativo, pelo VPL, considerando que a taxa mínima de atratividade da empresa Sucata Ltda. é 9% *aa*.

Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6	Ano 7
43,00	77,50	87,60	72,80	70,00	63,70	55,30

3. Está sendo analisada a construção de um laboratório para realizar serviços que atualmente são fornecidos por terceiros. A construção do laboratório levará dois anos e custará R$ 50.000,00, distribuídos da seguinte maneira: R$ 30.000,00 na data zero e R$ 20.000,00 na data um, e os retornos começarão no final do terceiro ano. Verificar se o projeto deve ser aceito considerando a taxa mínima de atratividade de 10% *aa*, conforme quadro dado (em R$ 1.000,00).

Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6	Ano 7
(30)	(20)	0	10	14	18	22	26

4. O quadro seguinte representa o fluxo de caixa anual de um investimento (em Reais). Calcular o VPL considerando a taxa mínima de atratividade de 18% *aa*.

Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
(30.000,00)	7.500,00	9.950,00	8.500,00	15.000,00	8.000,00

5. Refaça o exercício 4, considerando um valor residual de R$ 15.000,00. Verifique se o projeto deve ser aceito.
6. A loja de Informática Word-Excel oferece à empresa Roda Viva um microcomputador com quatro alternativas para o pagamento:
   - 1ª alternativa: R$ 3.500,0 à vista, com desconto de 10%;
   - 2ª alternativa: Entrada de R$ 700,00 e mais 12 prestações mensais iguais de R$ 260,00;

- 3ª alternativa: Sem entrada, com quatro pagamentos trimestrais iguais de R$ 1.100,00, sendo o primeiro de hoje a 3 meses; e
- 4ª alternativa: Pagamento único daqui a 12 meses no valor de R$ 5.200,00.

O sr. Folgado, diretor financeiro da Roda Viva está analisando as propostas apresentadas. Se a taxa de juros de mercado for de 4% ao mês, qual a melhor alternativa para a Roda Viva?

7. Compare os valores atuais dos custos das máquinas A e B, conforme o quadro que segue, em que a compra é considerada por um prazo de 10 anos, utilizando a TMA = 10% *aa*. Qual máquina escolher?

	Máquina A	Máquina B
Custo inicial	R$ 2.500,00	R$ 4.000,00
Valor residual	R$ 500,00	R$ 800,00
Manutenção anual	R$ 400,00	R$ 200,00

8. Dois equipamentos estão sendo analisados para um investimento a uma TMA = 10% *aa*, pelo VPL. Qual o equipamento a ser adquirido? Os seguintes dados foram obtidos:

	Equip. 1	Equip. 2
Custo inicial	R$25.000,00	R$30.000,00
Custo anual	R$9.000,00	R$10.000,00
Valor residual	R$5.000,00	R$7.000,00
Vida útil	12 anos	15 anos
Receita anual	R$15.000,00	18.000,00

Método da Taxa Interna de Retorno (TIR)

O método consiste em determinar, para cada investimento que se pretenda realizar, a taxa de juros que proporciona um fluxo de caixa equivalente ao que se espera obter com o projeto.

- A taxa de retorno de uma proposta de investimento é definida como sendo a taxa de juros para a qual o valor presente dos recebimentos resultantes do projeto é exatamente igual ao valor presente dos desembolsos. Ou ainda, é a taxa de desconto que torna o valor presente líquido de um fluxo de caixa igual a **Zero**.

A taxa interna de retorno será obtida igualando a equação do valor presente líquido a zero, $VPL = 0$, isto é,

$$VPL = \frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+i)^n} - CF_0 = 0$$

ou

$$\frac{CF_1}{1+i} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+i)^n} = CF_0$$

onde i é a taxa de retorno, ou TIR. A equação anterior é uma função polinomial em i de grau n.

É preciso resolver uma equação polinomial de grau n, o que, em geral, não pode ser feito por métodos clássicos, e o cálculo da taxa de retorno torna-se bastante dispendioso, pois teremos de calcular pelo método da tentativa e interpolações.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 6.6. As pesquisas de mercado antecipam que o lançamento de um sabonete líquido terá sucesso, pois atenderá à expectativa de novidades do mercado do setor. As estimativas de mercado, de produção e de engenharia definiram o fluxo de caixa do projeto de investimento, depois dos impostos (em R$ 1.000,00), dado no Quadro 17 a seguir. Calcular a Taxa Interna de Retorno (TIR) do projeto.

ANOS	0	1	2	3	4	5	6	7
CAPITAIS (R$)	(2.500)	350	450	500	750	750	800	1.000

Quadro 17: Fluxo de caixa do projeto de investimento
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: Você vai determinar a taxa i que anula o VPL, assim

$$VPL = \frac{350.000,00}{1+i} + \frac{450.000,00}{(1+i)^2} + \frac{500.000,00}{(1+i)^3} + \frac{750.000,00}{(1+i)^4} +$$

$$+ \frac{750.000,00}{(1+i)^5} + \frac{800.000,00}{(1+i)^6} + \frac{1.000.000,00}{(1+i)^7} - 2.500.000,00 = 0.$$

O cálculo manual da TIR requer calcular VPLs para diversas taxas de juros, até conseguir mudança no sinal do VPL que permita realizar uma interpolação linear. Assim, a solução desse problema é feita como segue:

- Construa um quadro, conforme o que segue, o qual mostra os resultados do VPL quando a taxa *i* varia entre 0% e 25% em intervalos de 5%.

i	VPL
0%	2.100.000
5%	1.185.741
10%	508.428
15%	(3.133)
20%	(396.383)
25%	(703.610)

- A TIR procurada está no intervalo [10%, 15%].
- Fazendo a interpolação linear, você encontra a TIR, assim

10% $VPL = 508.428$

i $VPL = 0$

15% $VPL = -3.133$, logo

$$\frac{i-10}{15-10} = \frac{0-508.428}{-3.133-508.428}$$

$$\Rightarrow i = 10\% + \frac{508.428}{3.133-508.428} \times 5\% = 14,97\%.$$

Portanto, a taxa interna de retorno deste projeto de investimento é 14,97% *aa*.

Para calcular a taxa interna de retorno na HP-12C você usa a função IRR (Internal Rate Return). Logo, a solução desse exemplo é feita como segue, digite:

f REG

2500 *CHS g* CF_0

350 *g* CF_j

450 *g* CF_j

500 *g* CF_j

750 *g* CF_j

750 *g* CF_j

800 *g* CF_j

1000 *g* CF_j

f IRR aparecendo no visor 14,97.

Exemplo 6.7. Um financiamento de R$ 80.000,00 será pago em 5 parcelas anuais consecutivas de R$ 15.000,00, R$ 30.000,00, R$ 20.000,00, R$ 25.000,00 e R$ 25.000,00. Calcular o custo efetivo anual do financiamento.

Resolução: O custo efetivo anual do financiamento é a taxa de retorno do fluxo de caixa (sob o ponto de vista de quem emprestou o dinheiro) dada no Quadro 18 a seguir.

Anos	0	1	2	3	4	5
Capitais (R$)	(80.000,00)	15.000,00	30.000,00	20.000,00	25.000,00	25.000,00

Quadro 18: Fluxo de caixa do financiamento
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Você calcula o valor da taxa i que consegue zerar o VPL que segue.

$$VPL = \frac{15.000,00}{1+i} + \frac{30.000,00}{(1+i)^2} + \frac{20.000,00}{(1+i)^3} + \frac{25.000,00}{(1+i)^4} + \frac{25.000,00}{(1+i)^5} - 80.000,00$$

ou seja

$$VPL = \frac{15.000,00}{1+i} + \frac{30.000,00}{(1+i)^2} + \frac{20.000,00}{(1+i)^3} + \frac{25.000,00}{(1+i)^4} + \frac{25.000,00}{(1+i)^5} - 80.000,00 = 0$$

ou

$$\frac{15.000,00}{1+i} + \frac{30.000,00}{(1+i)^2} + \frac{20.000,00}{(1+i)^3} + \frac{25.000,00}{(1+i)^4} + \frac{25.000,00}{(1+i)^5} = 80.000,00.$$

Para resolver esta equação de grau 5 você faz por tentativa e erro, mas isso está fora de nossos estudos; e para determinar a taxa interna de retorno, na HP-12 C, você digita

f REG

80000 CHS g CF_0

15000 g CF_j

30000 g CF_j

20000 g CF_j

25000 g CF_j

25000 g CF_j

f IRR aparecendo no visor 12,77.

Portanto, o custo efetivo anual do financiamento é 12,77%.

Exemplo 6.8. Uma mercadoria, cujo preço à vista é de R$ 4.000,00, pode ser paga em seis prestações mensais e iguais, sendo dados ao cliente quatro meses de carência (ou seja, a primeira prestação vence no quinto mês após a compra). Sendo de R$ 794,64 o valor de cada uma das seis prestações, determine a taxa mensal de juros cobrada no financiamento. O fluxo de caixa, sob o ponto de vista da loja, é dado no Quadro 19 a seguir.

MESES	CAPITAIS (R$)
0	(4.000,00)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	794,64
6	794,64
7	794,64
8	794,64
9	794,64
10	794,64

Quadro 19: Fluxo de caixa da loja
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: A taxa de juros mensal cobrada no financiamento é a taxa de retorno do fluxo de caixa dado anteriormente.

Você calcula o valor da taxa *i* que consegue zerar o VPL conforme segue.

$$VPL = \frac{794{,}64}{(1+i)^5} + \frac{794{,}64}{(1+i)^6} + \frac{794{,}64}{(1+i)^7} + \frac{794{,}64}{(1+i)^8} + \\ + \frac{794{,}64}{(1+i)^9} + \frac{794{,}64}{(1+i)^{10}} - 4.000{,}00 = 0,$$

ou

$$\frac{794{,}64}{(1+i)^5} + \frac{794{,}64}{(1+i)^6} + \frac{794{,}64}{(1+i)^7} + \frac{794{,}64}{(1+i)^8} + \frac{794{,}64}{(1+i)^9} + \frac{794{,}64}{(1+i)^{10}} = 4.000{,}00.$$

Para resolver esta equação você faz por tentativa e erro, mas isso está fora de nossos estudos; e para determinar a taxa interna de retorno, na HP-12C, você digita

f REG

4000 CHS g CF_0

0 g CF_j

4 g N_j

794.64 g CF_j

6 g N_j

f IRR aparecendo no visor 2,38.

Portanto, a taxa de juros mensal cobrada no financiamento é 2,38%.

Exemplo 6.9. O banco Alegria concede um empréstimo de R$ 200.000,00 à empresa Falida para ser pago em quatro parcelas anuais de R$ 50.000,00, R$ 90.000,00, R$ 80.000,00 e R$ 40.000,00, dentro de um, dois, três e quatro anos, respectivamente. Determinar a taxa de juros anual paga pela empresa Falida. O fluxo de caixa sob o ponto de vista do banco Alegria é dado no Quadro 20 a seguir.

Ano	Capitais (R$)
0	- 200.000,00
1	50.000,00
2	90.000,00
3	80.000,00
4	40.000,00

Quadro 20: Fluxo de caixa do banco alegria
Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução. Você determina a taxa *i* que anula o VPL, assim

$$VPL = \frac{50.000,00}{(1+i)^1} + \frac{90.000,00}{(1+i)^2} + \frac{80.000,00}{(1+i)^3} + \frac{40.000,00}{(1+i)^4} - 200.000,00 = 0,$$

ou

$$\frac{50.000,00}{(1+i)^1} + \frac{90.000,00}{(1+i)^2} + \frac{80.000,00}{(1+i)^3} + \frac{40.000,00}{(1+i)^4} = 200.000,00 \,.$$

Para resolver esta equação você faz por tentativa e erro, mas isso está fora de nossos estudos; e para determinar a taxa interna de retorno, na HP-12C, você digita

f REG

200000 CHS g CF_0

50000 g CF_j

90000 g N_j

80000 g CF_j

40000 g CF_j

f IRR aparecendo no visor 11,698.

Portanto, a taxa de juros anual paga pela empresa Falida é 11,698%.

Critério do Método da TIR

O critério do método da TIR, aplicado num investimento estabelece que:

- Se TIR > TMA (ou custo do capital), então o projeto deverá ser aceito.
- Se TIR < TMA (ou custo do capital), então o projeto deverá ser rejeitado.

Exemplo 6.10. A empresa Sempre Alerta está interessada em investir em um projeto cujo fluxo de caixa anual, depois dos impostos, está no Quadro 21 a seguir (em R$ 1.000,00). Aplicando o método da TIR, verificar se este projeto deve ser aceito tendo em conta que a TMA da empresa Sempre Alerta é 8,5% *aa*. Considerando, agora, que a TMA da empresa Sempre Alerta é 12,5% *aa*, o projeto deve ser aceito?

ANOS	0	1	2	3	4	5	6
CAPITAIS (R$)	-350	70	90	75	80	95	80

Quadro 21: Fluxo de caixa da Empresa Sempre Alerta

Fonte: Elaborado pelos autores deste livro

Resolução: Inicialmente, você calcula a TIR do projeto. De posse do valor da TIR você aplica o critério do método da TIR.

Você vai determinar a taxa (TIR) que anula o VPL, assim

$$VPL = \frac{70.000,00}{1+i} + \frac{90.000,00}{(1+i)^2} + \frac{75.000,00}{(1+i)^3} + \frac{80.000,00}{(1+i)^4} + \frac{95.000,00}{(1+i)^5} + \frac{80.000,00}{(1+i)^6} - 350.000,00 = 0,$$

ou

$$\frac{70.000,00}{1+i} + \frac{90.000,00}{(1+i)^2} + \frac{75.000,00}{(1+i)^3} + \frac{80.000,00}{(1+i)^4} + \frac{95.000,00}{(1+i)^5} + \frac{80.000,00}{(1+i)^6} = 350.000,00.$$

Para resolver esta equação você faz por tentativa e erro, mas isso está fora de nossos estudos; e para determinar a taxa interna de retorno, na HP-12C, você digita

f REG

350000 *CHS g* CF_0

70000 *g* CF_j

90000 *g* N_j

75000 *g* CF_j

80000 *g* CF_j

95000 *g* CF_j

80000 *g* CF_j

f IRR aparecendo no visor 10,30.

Logo, a TIR do projeto é 10,30% *aa*.

Considerando a TMA 8,5% *aa*, vem TIR > TMA; portanto o projeto deve ser aceito.

Considerando, agora a TMA 12,5% *aa*, vem TIR < TMA; portanto o projeto não deve ser aceito.

Resumindo, você tem:

Se a TMA da empresa Sempre Alerta é 8,5% *aa,* ela aceita o projeto.

Se a TMA da empresa Sempre Alerta é 12,5% *aa,* ela não aceita o projeto.

Saiba mais ...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte algumas de nossas referências bibliográficas:

GUERRA, Fernando. *Matemática financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

SAMANEZ, Carlos Patrício. *Matemática financeira*: Aplicações à análise de investimentos. 3. ed. São Paulo: Prentice HALL, 2002.

Resumindo

Nesta unidade você aprendeu algumas noções de Análise de Investimentos para verificar a viabilidade econômica financeira de um projeto através dos dois mais importantes métodos determinísticos utilizados em Análise de Investimentos, a saber: o método do Valor Presente Líquido (VPL) e o método da Taxa Interna de Retorno (TIR).

Chegamos ao final desta disciplina e para fechá-la com louvor aplique todos os conhecimentos adquiridos com ela nas atividades que seguem. Mas não deixe de procurar seu tutor e/ou reler o livro no caso de dúvidas.

Atividades de aprendizagem

1. Um equipamento no valor de R$ 45.000,00 é totalmente financiado, para pagamento em 9 parcelas mensais, sendo as 3 primeiras, de R$ 4.500,00, as 2 seguintes, de R$ 5.000,00, as 3 seguintes, de R$ 6.500,00, e a nona, de R$ 7.500,00. Qual a taxa interna de retorno mensal dessa operação?
2. Uma pequena propriedade rural está sendo vendida por R$ 50.000,00 à vista ou acertando 30% deste valor como entrada e o restante em cinco prestações mensais, iguais e sucessivas, no valor de R$ 3.000,00, seguidas de mais sete prestações mensais, iguais e sucessivas, de R$ 4.000,00. Determinar a taxa de juros mensal implícita neste plano.
3. Uma aplicação financeira envolve uma saída de caixa de R$ 7.000,00, no momento inicial, e os seguintes benefícios esperados de caixa ao final dos 3 meses imediatamente posteriores: R$ 1.800,00

ao final do primeiro mês; R$ 2.500,00 ao final do segundo mês e, R$ 3.000,00, ao final do terceiro mês. Calcular a rentabilidade (taxa de retorno) mensal dessa operação.

4. O Sr. Natanael Bom de Bico renegociou com o Banco Confiança uma dívida de R$ 11.000,00 para ser liquidada com pagamento de três Notas Promissórias: a primeira no valor de R$ 4.500,00, a segunda de R$ 4.000,00 e a terceira de R$ 3.500,00, vencíveis, respectivamente, em 30, 60 e 90 dias da data da contratação. Calcular a taxa de juro composto mensal cobrada em tal empréstimo.

5. A gerência de novos investimentos da empresa "Maxell" está realizando a análise do projeto para lançamento de um novo produto no mercado. Verificar se o projeto de investimento (segue fluxo de caixa anual (em R$1.000,00) após os impostos) deve ser aceito. Utilize o método da TIR, considerando uma taxa mínima de atratividade de 9% *aa*.

ANOS	0	1	2	3	4	5
CAPITAIS (R$)	(1.000)	230	230	230	230	230

6. Na tentativa de melhorar o resultado do projeto, o gerente de novos investimentos sugeriu incluir o valor residual estimado do equipamento na data final do projeto no valor de R$ 200.000,00. Verificar se o projeto deve ser aceito pelo método da TIR considerando a TMA =9% *aa*. O novo fluxo de caixa (em R$ 1.000,00) está a seguir.

ANOS	0	1	2	3	4	5	5
CAPITAIS (R$)	(1.000)	230	230	230	230	230	200

7. O estudo de viabilidade econômica de um determinado projeto conduziu ao fluxo de caixa dado a seguir. Determinar a rentabilidade anual desse projeto.

ANO	RECEBIMENTOS ANUAIS	PAGAMENTOS ANUAIS
0		R$5.000,00
1	R$1.800,00	R$800,00
2	R$2.250,00	R$1.000,00
3	R$2.600,00	R$1.200,00
4	R$3.000,00	R$1.400,00
5	R$3.400,00	R$1.600,00

Referências

BRASIL. *Lei n. 6.404, de 15 de dezembro de 1976*. Dispõe sobre as Sociedades por Ações. Disponível em: <http://www81.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/1976/6404.htm>. Acesso em: 10 abr. 2012.

______. *Decreto-Lei n. 1.598, de 26 de dezembro de 1977*. Altera a legislação do imposto sobre a renda. Disponível em: <http://www.normaslegais.com.br/legislacao/tributario/dl1598.htm>. Acesso em: 10 abr. 2012.

______. *Decreto n. 3.000, de 26 de março de 1999*. Regulamenta a tributação, fiscalização, arrecadação e administração do Imposto sobre a Renda e Proventos de Qualquer Natureza. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/d3000.htm>. Acesso em: 10 abr. 2012.

______. *Consolidação das Leis do Trabalho*. 25. ed. atualizada e ampliada. São Paulo: Saraiva, 1999.

______. *Constituição da República Federativa do Brasil*: promulgada em 5 de outubro de 1988. 24. ed. São Paulo: Saraiva, 2000.

______. *Decreto n. 2.490, de 4 de fevereiro de 1998*. Regulamenta a Lei n. 9.601, de 21 de janeiro de 1998, que dispõe sobre o contrato de trabalho por prazo determinado e dá outras providências. Disponível em: <http://www3.dataprev.gov.br/sislex/paginas/23/1998/2490.htm>. Acesso em: 10 abr. 2012.

______. *Lei n. 9.601, de 21 de janeiro de 1998*. Dispõe sobre o contrato de trabalho por prazo determinado e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9601.htm>. Acesso em: 10 abr. 2012.

BRIMSON, James A. *Contabilidade por atividades*. São Paulo: Atlas, 1996.

CFC – Conselho Federal de Contabilidade. *Resolução n. 750, de 29 de dezembro de 1993*. Dispõe sobre os Princípios Fundamentais de Contabilidade. Disponível em: <http://www.crc.org.br/legislacao/princ_fundamentais/pdf/princ_fundamentais_rescfc750.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2012.

HANSEN, Don R.; MOWEN, Maryanne M. *Gestão de custos*: contabilidade e controle. São Paulo: Pioneira: 2001.

HOUAISS, Antônio. *Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa*. Editora Objetiva. Versão 3.0. Jun. 2009.

IOB – Informações Objetivas: Pasta Temática Contábil e Balanços. *Custo de mão-de-obra e encargos sociais*. São Paulo, n. 28, 3ª Semana jul. 1993, p. 240-242.

IUDICIBUS, Sérgio de; MARION, José Carlos. *Contabilidade para não contadores*: para as áreas de administração, economia, direito e engenharia. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

LEONE, George Sebastião Guerra. *Custos*: planejamento, implantação e controle. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

MAHER, Michael. *Contabilidade de Custos*: criando valor para a administração. São Paulo: Atlas, 2001.

MARION, José Carlos. *Contabilidade básica*. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

______. *Contabilidade empresarial*. 13. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MARTINS, Eliseu. *Contabilidade de custos*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MATARAZZO, Dante Carmine. *Análise financeira de balanços*: abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1985.

NAKAGAWA, Masayuki. *ABC*: custeio baseado em atividades. São Paulo: Atlas, 1994.

REIS, Arnaldo Carlos de Andrade. *Demonstrações contábeis*: estrutura e análise. São Paulo: Saraiva, 2003.

SAVYTZKY, Taras. *Análise de balanços*: método prático. 4. ed. Curitiba: Juruá, 2007.

Fernando Guerra

Natural de Mercês – MG –, licenciado em Matemática pela Universidade Presidente Antônio Carlos, Barbacena (MG), em 1974. Mestre em Matemática Aplicada, área de Teoria da Informação. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina desde 1978, onde exerce atividades de ensino e extensão nos Cursos de Graduação na Educação a Distância da UFSC.

Inder Jeet Taneja

Doutor (PhD) pela Universidade de Delhi, Índia (1975). Pós-Doutor nas Áreas de Teoria da Informação, na Itália (1983-1984), e em Estatística, na Espanha (1989-1990). Pesquisador com áreas de concentração em Teoria da Informação e Estatística, nas quais tem aproximadamente 80 artigos, 5 capítulos e 1 livro publicados. Professor Titular do Departamento de Matemática da UFSC desde 1978.

e-mail: taneja@mtm.ufsc.br

http://www.mtm.ufsc.br/~taneja